Binomialsatsen och lite kombinatorik

Anders Källén

MatematikCentrum

LTH

anderskallen@gmail.com

Sammanfattning

Här diskuteras en del grundläggande kombinatorik, som utgår ifrån binomialkoefficienternas kombinatoriska betydelse. Vi härleder en del samband mellan dem, inklusive binomialsatsen. Dessutom generaliseras diskussionen till multinomialkoefficienter och det närliggande problemet med på hur många sätt man kan dela upp ett byte. Därefter adresserar vi några kombinatoriska problem som bygger på att man räknar element med den s.k. inklusions-exklusionsformeln.

Introduktion

I det här kapitlet ska vi först ingående diskutera koefficienterna a_k i utvecklingen

$$(1+x)^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Här är n ett positivt heltal. Talen a_k kallas binomialkoefficienter och är viktiga inom kombinatoriken. Just för att poängtera det bygger vi upp vår diskussion ur ett kombinatoriskt perspektiv.

De kombinatoriska resonemangen handlar om att räkna delmängder av en given mängd. Vi följer upp den diskussion med att också titta närmare på den s.k. inklusions-exklusionsformeln och använder den för att lösa några lite svårare kombinatoriska problem. I den diskussionen behandlas det s.k. *recontre*-problemet, liksom Stirlings tal av andra slaget.

Inledande kombinatorik

Kombinatoriken är en gren av matematiken som studerar hur många operationer av viss typ som kan utföras på en given mängd. Den grundläggande principen kallas multiplikationsprincipen och innebär att om operationen F_1 kan utföras på n_1 olika sätt och operationen F_2 på n_2 olika sätt, så kan operationen "först F_1, sedan F_2" utföras på $n_1 n_2$ olika sätt.

Exempel 1 *Det finns 2^n delmängder till $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$, inkluderande tomma mängden och hela Ω. För att se detta skriver vi ut elementen efter varandra och under dem någon av siffrorna 0 eller 1:*

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{array}.$$

En delmängd till Ω kan konstrueras genom att vi låter 0 betyda att motsvarande element i Ω (i raden ovanför) inte ska ingå i delmängden, medan 1 betyder att det ska ingå i den. Delmängden svarande till sviten $011\ldots0$ innehåller alltså elementen a_2, a_3 men inget av elementen a_1 eller a_n. Vi ser att till varje delmängd av Ω svarar en följd av n stycken 0:or och 1:or, och att till varje följd av 0:or och 1:or svarar en delmängd. Antalet delmängder är därför lika med antalet följder.

För att bestämma antalet sviter noterar vi att vi gör n stycken val: vid varje position kan vi välja 0 eller 1. Detta ger oss

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2 = 2^n$$

sådana sviter.

På samma sätt ser vi att antalet delmängder med udda antal element är 2^{n-1}, ty en sådan delmängd beskrivs av en likadan svit av 0:or och 1:or, men nu kan vi välja 0 eller 1 fritt endast på de $n-1$ första platserna. Om vi nämligen så långt har ett udda antal 1:or, måste vi välja en 0:a sista gången för att totalt få ett udda antal ettor, medan vi måste välja en 1:a sista gången om vi på de $n-1$ första platserna har ett jämnt antal 1:or

Låt $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$ vara en given ändlig mängd. Denna kan ordnas genom att vi räknar upp elementen i en viss ordning, t.ex. $(a_1, a_5, \ldots, a_2)$. En uppräkning av elementen i Ω

kallas en *permutation* av Ω. Det första elementet i en permutation av Ω kan väljas på n sätt, det andra kan sedan vara vilket som helst av de övriga $n-1$. Enligt multiplikationsprincipen kan därför de två första elementen bestämmas på $n \cdot (n-1)$ olika sätt. Fortsätter vi på detta sätt får vi att antalet permutationer av Ω är

$$n! = n(n-1)\dots 2\cdot 1 \qquad \text{(utlästes } n\text{-fakultet).}$$

Betrakta nu följande tre operationer på Ω:

F_1**:** ta ut en delmängd om k element ur Ω,

F_2**:** ordna de k uttagna elementen,

F_3**:** ordna de kvarlämnade $n-k$ elementen.

Operationen "först F_1, sedan F_2 och slutligen F_3" innebär då att vi ordnar den ursprungliga mängden. Låter vi därför $\binom{n}{k}$ (utläses: n över k) beteckna antalet delmängder om k element som finns av en mängd om n element, d.v.s. antalet sätt som F_1 kan utföras på, så följer ur multiplikationsprincipen att

$$\binom{n}{k} \cdot k! \cdot (n-k)! = n!.$$

Löser vi ut får vi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

Här definieras $0! = 1$ och av bekvämlighetesskäl definierar vi

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{om } k \text{ är ett heltal } > n.$$

Exempel 2 *Ett fotbollslag består av* 11 *spelare. En tränare har* 20 *aktiva spelare att välja mellan då hans lag ska tas ut. Detta ger honom*

$$\binom{20}{11} = 167960$$

olika sätt att välja ut vilka spelare som ska representerar klubben. Varje sådan representation ger $11! = 39916800$ *olika tänkbara laguppställningar.*

Egenskaper hos binomialkoefficienterna

Vi ska nu titta lite närmare på binomialkoefficienterna. Två fundamentala egenskaper finns i de följande två exemplen.

Exempel 3 *Vi har sett att det finns 2^n delmängder av $\Omega = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$. Men en delmängd måste innehålla k element för något $k = 0, 1, \ldots, n$, och antalet delmängder med precis k element är $\binom{n}{k}$ Vi har därför följande samband*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{2}$$

Vi kan också notera att summan över alla udda k är lika med summan över alla jämna k, och båda summorna är lika med 2^{n-1}. Detta följer ur diskussionen i exempel 1

Exempel 4 *Följande symmetri hos binomialkoefficienterna följer direkt ifrån (1):*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{3}$$

Vi kan också inse att så måste vara fallet rent kombinatoriskt, eftersom vänsterledet är antalet delmängder vi kan konstruera med precis k element. Men en sådan delmängd svarar precis mot att vi lämnat kvar $n-k$ element, och högerledet är antalet sätt vi kan välja ut $n-k$ element som inte ska ingå i vår delmängd (de övriga ska).

Exempel 5 *En delmängd om k element av $\Omega = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ kan antingen innehålla a_{n+1} eller inte innehålla a_{n+1}. Om den innehåller a_{n+1} består den dessutom av $k-1$ element ur mängden $\{a_1, \ldots, a_n\}$ medan om den inte innehåller a_{n+1} så består delmängden av k element ur mängden $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Detta ger ett kombinatoriskt bevis för formeln*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}. \tag{4}$$

Om vi skriver ut binomialkoeffienterna $\binom{n}{k}$ i form av en triangel (kallas Pascals triangel) där $\binom{n}{k}$ återfinns på plats k ($k = 0, 1, \ldots, n$) i den n:te raden, så gäller att varje $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ är det nedre hörnet i en triangel $\begin{matrix} a & & b \\ & c & \end{matrix}$ (i figuren $a = 4$, $b = 6$, $c = 10$). Formel (4) säger att $c = a + b$. Det är bekvämt att definiera symbolen $\binom{n}{k}$ även då n inte är ett heltal. Vi gör det genom att skriva (1) på formen

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}. \tag{5}$$

Notera att när n inte är ett heltal gäller *inte* att $\binom{n}{k} = 0$ då $k > n$.

Exempel 6 *Då $n > 0$ gäller att*

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

eftersom täljaren i uttrycket som definierar vänsterledet är

$$(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1) = (-1)^k n(n+1)\ldots(n+k-1)$$

vilket är täljaren i det uttryck som definierar högerledet.

En generalisering av (2) är följande viktiga sats.

Sats 1 (Binomialsatsen) *För alla positiva heltal n gäller att*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k. \tag{6}$$

Bevis. Vi skriver ut $(1+x)^n$ som en produkt

$$(1+x)(1+x)\dots(1+x)$$

av n faktorer. Koefficienten framför x^k i högerledet blir då det antal sätt vi kan välja ut k paranteser att ta x ifrån och sedan ta 1 från de $n-k$ övriga. Detta antal är $\binom{n}{k}$. □

Anmärkning För allmänna reella n gäller att

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k, \quad |x| < 1,$$

vilket är den generella formuleringen av binomialsatsen. När n är ett positivt heltal blir summan ändlig, och därmed sann för alla x.

Sats 2 (Den hypergeometriska identiteten) *Om a, b och n är positiva heltal gäller att*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

Bevis. Låt $\Omega = \{u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b\}$ med $a+b$ element. En delmängd av Ω om n element består då av k stycken u_i och $n-k$ stycken v_i för något $k = 0, \dots, n$. Eftersom antalet delmängder med k stycken u_i och $n-k$ stycken v_i är $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$, enligt multiplikationsprincipen, följer likheten. □

Exempel 7 *Med $a = b = n$ i den hypergeometriska identiteten får vi sambandet*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Multinomialsatsen

Hittills har vi delat upp en mängd Ω om n element i två delmängder om k respektive $n-k$ element. Vi ska nu generalisera såtillvida att vi ska dela upp Ω i r delmängder ($r \geq 2$). Antag att dessa r delmängder ska innehålla $k_1, k_2, \dots, k_{r-1}$ respektive k_r element, där $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. Låt

$$\binom{n}{k_1\ k_2\ \dots\ k_r}$$

vara antalet sådana uppdelningar. Genom att ordna elementen i varje delmängd får vi en ordning av Ω, alltså en permutation, och varje permutation av Ω kan erhållas på sådant sätt. Multiplikationsprincipen ger då att

$$k_1!k_2!\ldots k_r!\binom{n}{k_1\ k_2\ \ldots\ k_r} = n!$$

dvs

$$\binom{n}{k_1\ k_2\ \ldots\ k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}. \tag{7}$$

Dessa tal kallas multinomialkoefficienterna. Notera att om $r = 2$ så är $k_2 = n - k_1$ och $\binom{n}{k_1\ k_2} = \binom{n}{k_1}$. Vi kommer att använda båda dessa beteckningar.

Exempel 8 *Antal sätt en kortlek om 52 kort kan delas upp på 4 händer om 13 kort vardera är*

$$\binom{52}{13\ 13\ 13\ 13} = \frac{52!}{(13!)^4} = 5.36 \cdot 10^{28}.$$

Exempel 9 *Hur många ord (=bokstavskombinationer) om 11 bokstäver kan bildas ur ordet MISSISSIPPI genom permutation av bokstäverna.*

De 11 bokstäverna är indelade i 4 grupper: ett M ($k_1 = 1$), fyra I:n ($k_2 = 4$), fyra S ($k_3 = 4$) och två P:n ($k_4 = 2$). Att bilda ett ord innebär att vi delar in de 11 positionerna i 4 delmängder: den första består av en position och där sätter vi M:et, den andra består av 4 positioner och där sätter vi de fyra I:na o.s.v. Antalet ord blir därför lika med

$$\binom{11}{1\ 4\ 4\ 2} = \frac{11!}{1!4!4!2!} = 34650.$$

Exempel 10 *Om n är ett positivt heltal och $t_1, t_2, \ldots, t_r$ är reella tal, så har vi följande generalisering av binomialteoremet:*

$$(1 + t_1 + \ldots + t_r)^n = \sum \binom{n}{k_1\ \ldots\ k_r} t_1^{k_1} t_2^{t_2} \ldots t_r^{k_r},$$

där summationen sker över mängden

$$\{(k_1, \ldots, k_r);\ k_i \geq 0, i = 1, \ldots, r \text{ och } k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n\}.$$

Denna identitet kallas multinomialteoremet och bevisas enklast kombinatoriskt. På samma sätt som vi tidigare bevisade binomialteoremet.

Hur många sätt kan vi dela upp något på?

Vi ska nu titta på en annan typ av kombinatoriskt problem som illustreras i följande exempel.

Exempel 11 *Per, Peter och Paul har "nallat" 40 äpplen. På hur många sätt kan de delas upp mellan dem? För att bestämma detta antal kan vi använda följande trick: lägg två apelsiner i korgen. Plocka sedan upp frukterna en och en och ge de äpplen som kommer innan den första apelsinen till Per (han blir utan äpplen om en apelsin kommer först), de äpplen som kommer mellan de två apelsinerna ges till Peter och resten ges till Paul. Antalet sätt att dela upp äpplena blir därför lika med antalet sätt att ta ut två apelsiner ur en korg om 42 frukter, alltså* $\binom{42}{2}$.

Detta exempel är ett specialfall av följande mer allmänna problem: hur många heltal $r_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$ finns det som uppfyller ekvationen

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = k, \tag{8}$$

där k är ett givet heltal?

Sats 3 *Ekvationen (8) har* $\binom{n+k-1}{n-1}$ *icke-negativa heltalslösningar.*

Bevis. Skriv ut k stycken 1:or efter varandra och skjut in mellan dessa $n-1$ vertiala sträck, så att vi får en figur på formen

$$1\ 1\ 1 \mid 1\ 1 \mid \mid 1\ 1\ 1 \ldots \mid 1.$$

Sviten får börja och sluta med vertikala streck. Låt $r_1 =$ antalet ettor till vänster om det första vertikala strecket, $r_2 =$ antalet ettor mellan det första och det andra vertikala sträcker o.s.v. till $r_n =$ antalet ettor till höger om det sista vertikala strecket. I vårt fall är $r_1 = 3,\ r_2 = 2,\ r_3 = 0, \ldots, r_n = 1$ Vi ser då att antalet lösningar till (8) är precis lika med antalet sådana figurer. Men detta antal är antalet sätt att bland $k+n-1$ positioner välja ut $n-1$ stycken att sätta vertikala streck på (och ettor på de övriga k). Detta bevisar satsen. □

Corollary *Ekvationen (8) har för givet* $k \geq n$ *precis* $\binom{k-1}{n-1}$ *heltalslösningar* $r_1, \ldots, r_n$ *med alla* $r_i \geq 1$.

Bevis. Vi skriver om (8) som

$$(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \ldots + (r_n - 1) = k - n.$$

I variablerna $r_i - 1$ har denna enligt satsen precis

$$\binom{n + (k-n) - 1}{n-1} = \binom{k-1}{n-1}$$

icke-negativa heltalslösningar. □

Exempel 12 *Vi kunde löst exempel 11 genom att låta* $r_1 =$ *antalet äpplen Per får,* $r_2 =$ *antalet äpplen Peter får och* $r_3 =$ *antalet äpplen Paul får. Vi ska då lösa ekvationen* $r_1 + r_2 + r_3 = 40$ *och enligt sats 3 har denna* $\binom{42}{2}$ *icke-negativa heltalslösningar. Om vi kräver att alla pojkar ska få minst ett äpple får vi enligt följdsatsen* $\binom{39}{2}$ *olika uppdelningar.*

Inklusions-exklusionsformeln

Vi börjar detta avsnitt med ett kanske för enkelt exempel.

Exempel 13 *För ett litet exportföretag med* 67 *anställda gäller att* 47 *av dessa kan spanska och* 35 *kan tyska, medan* 23 *av de anställda kan båda språken. Hur många av de anställda kan varken spanska eller tyska?*

För att bena ut detta problem inför vi två egenskaper hos varje anställd, vilka de kan ha eller sakna:

c_1 *medarbetaren kan spanska,*

c_2 *medarbetaren kan tyska.*

Låt $N(c_i)$ *beteckna antalet som har egenskapen* c_i *och låt* c_1c_2 *beteckna att individen har bägge egenskaperna. Då vet vi att*

$$N(c_1) = 47, \quad N(c_2) = 35, \quad N(c_1c_2) = 23.$$

Då gäller att antalet som kan antingen spanska eller tyska eller båda ges av uttrycket

$$N(c_1) + N(c_2) - N(c_1c_2) = 47 + 35 - 23 = 59.$$

Vi måste här subrahera $N(c_1c_2)$ *eftersom de räknas in i både* $N(c_1)$ *och* $N(c_2)$*, och därför skulle räknas två gånger om vi inte gör det. Slutsatsen är att* $67 - 59 = 8$ *stycken kan varken spanska eller tyska. Vilket vi skriver*

$$N(c_1^*c_2^*) = N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1c_2),$$

där $N = 67$ *och* c_i^* *betecknar att medarbetaren inte hade egenskapen* c_i*.*

Vi vill nu generalisera resonemanget och formeln sist i exemplet till en allmän kombinatorisk princip.

Sats 4 (Inklusions-exklusionsformeln) *Antag att* N *föremål kan ha egenskaperna* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *och låt* $N(c_ic_j \ldots c_k)$ *vara antalet som har egenskaperna* $c_i, c_j, \ldots, c_k$ *(samt eventuellt fler). Då gäller att antalet som inte har någon av egenskaperna* $c_1, \ldots, c_n$ *är*

$$N(c_1^*c_2^* \ldots c_n^*) = N - \sum_i N(c_i) + \sum_{i<j} N(c_ic_j) - \sum_{i<j<k} N(c_ic_jc_k) + \ldots + (-1)^n N(c_1c_2 \ldots c_n). \tag{9}$$

Bevis. Vi börjar med att skriva om formeln så att den speciellt noterar egenskapen c_n:

$$N - \sum_1^{n-1} N(c_i) + \sum_{i<j<n} N(c_ic_j) - \sum_{i<j<k<n} N(c_ic_jc_k) + \ldots - (-1)^{n-1} N(c_1c_2 \ldots c_{n-1})$$

$$-N(c_n) + \sum_i^{n-1} N(c_ic_n) - \sum_{i<j<n} N(c_ic_jc_n) + \ldots + (-1)^n N(c_1 \ldots c_n).$$

Låter vi c beteckna egenskapen att ha någon av egenskaperna $c_1, \ldots, c_{n-1}$ och antar att formeln är sann, så betecknar uttrycket på första raden $N(c^*)$, alltså antalet som inte har någon av dessa egenskaper. I den andra raden, under samma antagande om att formeln är sann, har vi först en term $-N(c_n)$ och sedan ett uttryck som är $N - N(d_1^* d_2^* \ldots d_{n-1}^*)$, där d_i innebär egenskapen att ha både egenskapen c_i och egenskapen c_n.

Vi kan därför bevisa satsen genom att göra ett induktionsbevis. Den är trivialt sann för $n = 1$ egenskap(er) och vi antar att den alltid är sann för $n - 1$ egenskaper och ska visa att den då också är sann för n egenskaper. Vi ser då att högerledet ovan kan skrivas

$$N(c^*) - N(c_n) + (N - N(d_1^* \ldots d_{n-1}^*)) = N - N(c) - N(c_n) + N(cc_n) = N(c^* c_n^*).$$

Detta bevisar satsen. □

Exempel 14 (Eratosthenes såll) *Eratosthenes såll är namnet på den uppenbara metoden att finna alla primtal och som fungerar enligt följande beskrivning. Antag att vi vill finna alla primtal mellan* 1 *och* 20*:*

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20$$

Steg 1: *ta bort* 1 *(som inte är ett primtal) och alla heltal som är delbara med* 2 *men större än* 2*:*

$$2 \quad 3 \qquad 5 \qquad 7 \qquad 9 \qquad 11 \qquad 13 \qquad 15 \qquad 17 \qquad 19$$

Steg 2: *ta bort alla heltal som är delbara med* 3 *men större än* 3*:*

$$2 \quad 3 \qquad 5 \qquad 7 \qquad\qquad 11 \qquad 13 \qquad\qquad 17 \qquad 19$$

Steg 3: *ta bort alla heltal som är delbara med* 5 *men större än* 5*. Ändrar inget!*

Vi fortsätter sedan och dividerar med $7, 11, \ldots$ *och finner att i inget av fallen ändras sviten. Listan ovan innehåller därför alla primtal mellan* 1 *och* 20*. De är* 8 *stycken.*

Hur många primtal finns det då mellan 1 *och* 1000*? Att besvara frågan kräver en del arbete men sker i princip med hjälp av inklusions-exklusionsformeln. Låt oss illustrera hur genom att bestämma hur många tal mellan* 1 *och* 1000 *som inte är delbara med* $2, 3$ *eller* 5*. Inför*

c_1**:** *talet är delbart med* 2

c_2**:** *talet är delbart med* 3

c_3**:** *talet är delbart med* 5*.*

Vi har då att

$$N(c_1) = 500,\ N(c_2) = 333,\ N(c_3) = 200,\ N(c_1c_2) = 166,$$
$$N(c_1c_3) = 100,\ N(c_2c_3) = 66,\ N(c_1c_2c_3) = 33.$$

För att t.ex. bestämma $N(c_1c_2)$*, alltså antalet tal delbara med* 6*, delar vi* 1000 *med* 6*, vilket är* $166 + 2/3$*, och tar heltalsdelen av detta, alltså* 166*. Antalet tal mellan* 1 *och* 1000 *som inte är delbara med* $2, 3, 5$ *fås nu med hjälp av inklusions-exklusionsformeln*

$$N(c_1^* c_2^* c_3^*) = 1000 - 500 - 333 - 200 + 166 + 100 + 66 - 33 = 269.$$

Ett viktigt specialfall av inklusions-exklusionsformeln är fallet då det för varje r gäller att

$$N(c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_r}) = a_r,$$

d.v.s., $N(c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_r})$ beror inte av vilka egenskaperna c_i är, utan endast av att de är r stycken. Eftersom antalet termer av denna typ för fixt r är $\binom{n}{r}$, så får vi i detta specialfall att

$$(10)\qquad N(c_1^*c_2^*\dots c_n^*) = N - \binom{n}{1}a_1 + \binom{n}{2}a_2 - \dots + (-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a_k,$$

där vi satt $a_0 = N$.

Exempel 15 *Antalet sätt att plocka ut m element ur mängden $\{a_1, \dots, a_n\}$ är $N = \binom{n}{m}$. Låt $N(a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_r})$ beteckna antalet delmängder som innehåller elementen $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$. Då gäller att $N(a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_r}) = \binom{n-r}{m-r}$, eftersom en sådan delmängd består av de givna r elementen samt ytterligare $m - r$ stycken plockade från en mängd om $n - r$ element. Men en delmängd om m element måste innehålla något av a_i:na, så $N(a_1^*a_2^*\dots a_n^*) = 0$. Ur (10) följer nu identiteten*

$$\binom{n}{0}\binom{n}{m} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{m-1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{m-2} - \dots + (-1)^m\binom{n}{m}\binom{n-m}{0} = 0.$$

Exempel 16 (Recontre-problemet) *I en urna ligger n lappar, numrerade $1, 2, \dots, n$. Man drar slumpmässigt en lapp i taget tills urnan är tom. Om man i dragning i fick lapp nr i säger man att man har en "recontre". Vi ska bestämma sannolikheten (antal gynsamma fall delat med antalet möjliga fall) för att man inte får någon recontre.*

Antal möjliga fall är $N = n!$. Låt c_i beteckna att man får recontre i dragning i. Då gäller att $N(c_{i_1}\dots c_{i_r}) = (n-r)!$, ty recontre i dessa dragningar svarar mot att vi gör $n - r$ dragningar med $n - r$ numrerade lappar, eftersom vi kan bortse från lapparna $i_1, \dots, i_r$. Med hjälp av (10) får vi nu antalet gynnsamma fall till

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^n\binom{n}{n},$$

ett tal som vi betecknar D_n. Om vi dividerar med $n!$ och förkortar får vi att den sökta sannolikheten är

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n\frac{1}{n!}.$$

Det följer att sannolikheten att få minst en recontre är

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots - (-1)^n\frac{1}{n!},$$

ett tal som väl approximeras med $1 - 1/e \approx 0.63$ redan för små n ($n \geq 7$).

Exempel 17 *På hur många sätt kan man stoppa m olika bollar i n olika hål, så att varje hål innehåller minst en boll?*

Vi har n hål att välja på för varje boll, så $N = n^m$. Låt nu c_i beteckna att hål nummer i saknar boll. Då gäller att *a)* $N(c_i) = (n-1)^m$, *eftersom vi har* $n-1$ *hål att placera de* m *bollarna i,*

b) $N(c_i c_j) = (n-2)^m$, *eftersom vi har* $n-2$ *hål att placera de* m *bollarna i*

osv. Allmänt gäller alltså att

$$N(c_{i_1} \dots c_{i_r}) = (n-r)^m.$$

Det följer ur (10) att det sökta antalet är

$$N(c_1^* \dots c_n^*) = n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)^m.$$

Det tal som dyker upp i högerledet här har fått ett eget namn.

Definition Talen

$$S(m,n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

kallas *Stirlingtalen av andra slaget.*

Exempel 18 *I ett livsmedelspaket ligger en reklampresent som kan vara av m olika typer. Varje typ förekommer med lika sannolikhet och presenterna fördelas slumpmässigt på paketen. En person köper n paket. Hur stor är sannolikheten att han får en fullständig kollektion av presenter?*

Vi kan se presenterna som bollar och paketen som hål. Låt oss numrera paketen. Vi har då $n!S(m,n)$ *gynnsamma och* m^n *möjliga utfall, så den sökta sannolikheten är*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (1 - \frac{k}{n})^m.$$

Vi har följande observation, som liknar den som ligger till grund för Pascals triangel.

Sats 5 *Det gäller att*

$$S(m+1,n) = S(m,n-1) + nS(m,n).$$

Bevis. Betrakta mängden $\{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}\}$. Då är $S(m+1,n)$ lika med antalet sätt som dessa element kan fördelas mellan n identiska behållare, så att ingen behållare är tom. I ett sådant fall gäller endera av två alternativ:

a) a_{m+1} ligger ensam i en behållare. Vi har då fördelat $a_1, \dots, a_m$ bland $n-1$ behållare, vilket kan göras på $S(m,n-1)$ olika sätt.

b) a_{m+1} ligger tillsamman med något annat a_i i en behållare. Vi har då fördelat $a_1, \dots, a_m$ bland n behållare, vilket kan göras på $S(m,n)$ olika sätt, och sedan har vi valt ut en av dessa behållare att lägga a_{m+1} i, ett val som kan göras på n sätt. Totalt alltså $nS(m,n)$ olika sätt.

Därmed är satsen bevisad. □

Exklusions-inklusionsformeln kan formuleras på följande sätt. Låt som ovan $c_1, \ldots, c_n$ vara en uppsättning villkor på elementen i en mängd Ω och låt

$$S_k = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} N(c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_k}).$$

Då gäller enligt (9) att antalet element i Ω som inte uppfyller något av villkoren $c_1, \ldots, c_n$ är lika med

$$S_0 - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^n S_n.$$

(Vi har att $S_0 = N$.) Låt oss nu titta på antalet element som uppfyller precis ett av villkoren $c_1, \ldots, c_n$.

Betrakta först fallet $n = 3$. Det sökta antalet är inte så stort som

$$S_1 = N(c_1) + N(c_2) + N(c_3),$$

ty summan i högerledet räknar t.ex. de element som uppfyller både c_1 och c_2 två gånger, medan de element som uppfyller alla tre c_i:na räknas tre gånger. Sådana element ska inte räknas alls. Vi drar därför från S_1 bort antalet

$$2S_2 = 2(N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3)).$$

Uttrycket $S_1 - 2S_2$ räknar de element som uppfyller precis ett c_i, men inte de element som uppfyller precis två villkor c_i. De element som uppfyller alla tre villkoren räknas emellertid först 3 gånger i S_1 och sedan 6 gånger i $2S_2$, totalt alltså -3 gånger. Vi måste därför lägga till talet $3N(c_1c_2c_3)$ till vårt uttryck, och finner därför att antalet element som uppfyller precis ett av villkoren ges av

$$S_1 - 2S_2 + 3S_3.$$

Men detta resonemang generaliseras mer eller mindre direkt nu, och vi ser att antalet element som uppfyller precis ett av villkoren $c_1, \ldots, c_n$ är

$$S_1 - 2S_2 + 3S_3 - 4S_4 + \ldots + (-1)^{n-1} n S_n.$$

För att se detta kan vi resonera så här. Låt x vara ett element som uppfyller precis r villkor, där $1 \leq r \leq n$. Då räknas x $\binom{r}{k}$ gåner i summan S_k för $k = 1, \ldots, r$, men inte i S_k då $k > r$. Antalet "gånger" x ingår i summan ovan blir därför, eftersom $k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}$,

$$\begin{aligned}
&\binom{r}{1} + 2\binom{r}{2} + 3\binom{r}{3} + \ldots + (-1)^r \binom{r}{r} \\
&= r\left(\binom{r-1}{0} - \binom{r-1}{1} + \binom{r-1}{2} + \ldots + (-1)^r \binom{r-1}{r-1}\right).
\end{aligned}$$

Om $r = 1$ är detta 1, men om $r > 1$ är det enligt binomialsatsen lika med $r(1-1)^{r-1} = 0$.

Allmännare har vi följande sats.

Sats 6 *Med beteckningarna från ovan gäller att antalet element i Ω som uppfyller precis m av villkoren $c_1, \ldots, c_n$ är lika med*

$$S_m - \binom{m+1}{1} S_{m+1} + \binom{m+2}{2} S_{m+2} - \ldots + (-1)^{n-m} \binom{n}{n-m} S_n.$$

Bevis. Vi resonerar som ovan. Låt x vara ett element i Ω. Om

a) x inte uppfyller m villkor bidrar den inte till någon term i summan.

b) x uppfyller precis m villkor ingår den en gång i S_m men inte i något $S_k, k > m$,

c) x uppfyller r villkor där $m+1 \leq r \leq n$, så räknas x $\binom{r}{k}$ gånger i $S_k, k = m+1, \ldots, r$. Eftersom
$$\binom{m+k}{k}\binom{r}{m+k} = \binom{r}{m}\binom{r-m}{k}, k = 0, \ldots, r-m,$$
får vi att summan blir $\binom{r}{m}(1-1)^{r-m} = 0$.

Därmed är satsen bevisad. □

Exempel 19 *Låt oss beräkna sannolikheten för precis en recontre i försöket som beskrevs i Exempel 16. Vi fann där att*
$$S_k = \binom{n}{k}(n-k)!,$$
så enligt satsen ovan blir antalet gynnsamma fall
$$S_1 - 2S_2 + 3S_3 - 4S_4 + \ldots + (-1)^{n-1}nS_n$$
$$= \binom{n}{1}(n-1)! - 2\binom{n}{2}(n-2)! + 3\binom{n}{3}(n-3)! - \ldots + (-1)^{n-1}n$$
$$n\left(\binom{n-1}{0}(n-1)! - \binom{n-1}{1}(n-2)! + \binom{n-1}{2}(n-3)! + \ldots + (-1)^{n-1}\right) = nD_{n-1}.$$
Dividerar vi med antalet möjliga fall, som är $n!$ stycken, får vi den sökta sannolikheten till
$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}.$$

Anmärkning Resultatet i föregående exempel kunde vi ha härlett på ett enklare sätt enligt följande resonemang. För ett gynnsamt fall ska vi göra två operationer: dels välja ut ett nummer mellan 1 och n som ska vara vår recontre, dels att inte få någon recontre vid dragningen av de övriga $n-1$ lapparna. Detta ger oss antalet gynsamma fall till nD_{n-1}.

Allmännare blir antalet gynsamma fall för precis k stycken recontre lika med $\binom{n}{k}D_{n-k}$.