

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.  
Lämna tydliga svar om så är möjligt.

1. Beräkna följande gränsvärden:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^x}{(x-2)\ln(x)}$ ,      b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\ln(1+2x)}$ ,      (0.2)/styck

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$ ,      d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{100} - \ln(x^9) + 2^x}{\sqrt{4^{x+1} - x^9}}$ .      (0.3)/styck

2. a) Bestäm alla  $z$  som löser ekvationen  $z^{15} = 1 + i$ . (Svara på polär form.)      (0.5)

b) Rita i det komplexa talplanet ut de  $z$  som samtidigt uppfyller följande två villkor:  
 $|z - 1 - 2i| \leq 1$  och  $\text{Im } z \geq 3/2$ .      (0.5)

3. Betrakta funktionen  $f(x) = x^4 - 8x^2 - 1$ , definierad för alla reella  $x$ .

a) Bestäm alla lokala extrempunkter och deras typ.      (0.5)

b) Ange funktionens värdemängd. Ange även, för varje tal  $y$ , antalet lösningar till ekvationen  $f(x) = y$ .      (0.4)

c) Ange ett intervall på formen  $[n, n+1]$ , där  $n$  är ett heltal, i vilket det största nollstället till funktionen  $f$  ligger. (Glöm inte motivera!)      (0.1)

4. a) Formulera medelvärdessatsen. Använd sedan denna till att bevisa att om en funktion definierad på ett intervall har en derivata som är positiv (på hela intervallet) så är funktionen strängt växande.      (0.5)

b) Bestäm alla asymptoter till kurvan  $y = \frac{x^3}{2x^2 + 7} - \arctan(2x)$ .      (0.5)

5. a) Visa att  $|\ln(3+x) - \ln 3 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{18}| < 0.015$  då  $0 \leq x \leq 1$ .      (0.5)

b) Bestäm det tal  $a$  för vilket gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - \sqrt{1+x}}{\sin^2 x}$$

existerar (ändligt), och bestäm gränsvärdet för detta val av  $a$ .      (0.5)

6. Per, som är lantbrukare, ska bygga en silo för förvaring av säd. Den ska bestå av en (rak, cirkulär) cylinder ovanpå vilken en halvsfär är lagd som tak (samma radie som cylindern). Kostnaden för väggen (alltså cylindern) är 2000 kr per  $\text{m}^2$ , medan kostnaden för taket är 4000 kr per  $\text{m}^2$ . Han kan dock endast spendera summan  $144000\pi$  kr totalt, och för det priset vill han ha så stor volym som möjligt. Hur ska silon dimensioneras? Golv ska inte läggas.

(Volymen av ett klot med radien  $r$  är  $4\pi r^3/3$  och dess begränsningsyta har arean  $4\pi r^2$ .)

God Jul och Gott Nytt År!