

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Ange en primitiv funktion till

a) $x \ln(x+1)$ (0.3) b) $\frac{3x+1}{x^2+9}$ (0.4) c) $\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ (0.3)

2. a) Beräkna $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{-1+i}\right)^{50}$. Svara på formen $a+bi$. (0.5)

b) Visa att

$$|\ln(1+2x)-2x| \leq \frac{1}{2} \quad \text{då} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \quad (0.5)$$

3. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 4y = 4 \sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

4. Låt l beteckna kurvstycket $y = \frac{1}{3}(x-1)^{3/2}$, $1 \leq x \leq 3$.

a) Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas då kurvstycket l roteras kring x -axeln. (0.5)

b) Bestäm längden av l . (0.5)

5. a) Skriv ner definitionen av vad som menas med att den generaliserade integralen $\int_a^\infty f(x)dx$ är konvergent. (0.1)

b) Avgör för var och en av följande generaliserade integraler om de är konvergenta eller divergenta (motivera dina svar!):

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx. \quad (0.3)$$

c) Avgör för var och en av följande generaliserade integraler om de är konvergenta eller divergenta (motivera dina svar!):

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3 + \sqrt{x}} dx \quad \int_0^1 \frac{1}{x^3 + \sqrt{x}} dx \quad \int_0^1 \frac{1}{x^5 + x} dx. \quad (0.6)$$

6. Ett föremål med massan 2 kg släpps från stillastående från hög höjd. Föremålet påverkas dels av tyngdkraften (tyngdaccelerationen antas vara $g = 10 \text{ m/s}^2$), dels av en motriktad kraft orsakad av luftmotståndet vilken i varje ögonblick är proportionell mot kvadraten av föremålets fart. Proportionalitetskonstanten i det senare fallet antas vara $1/45 \text{ kg/m}$. Ange en funktion som beskriver hur föremålets fart varierar med tiden. Hur stor blir farten efter mycket lång tid, dvs. då tiden $t \rightarrow \infty$?

(Vi påminner om att det enligt Newtons kraftekvation gäller att summan av de krafter som påverkar ett föremål är lika med produkten av föremålets massa och acceleration.)

LYCKA TILL!