

INGA HJÄLPMEDEL.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{1}{1+y} dx dy,$$

där  $D$  är fyrhörningen med hörn i  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$  och  $(1, 1)$ .

2. Låt  $f(x, y) = (1 + x - y^2)e^x$ .

a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan  $z = f(x, y)$  i punkten  $(0, 2, -3)$ . (0.2)

b) Bestäm det största och minsta värdet av  $f$  på området  $D$  som ges av olikheterna  $0 \leq x \leq y$ ,  $y \leq 2$ . (0.6)

c) Har  $f$  något största och/eller minsta värde på  $D = \mathbb{R}^2$ ? Bestäm isåfall dessa. (0.2)

3. a) Funktionen  $f(x, y)$  är definierad i en omgivning av punkten  $(a, b)$ . Definiera vad som menas med att  $f$  är partiellt deriverbar med avseende på  $x$  i  $(a, b)$ . Definiera även den partiella derivatan av  $f$  med avseende på  $x$  i  $(a, b)$ . (0.2)

b) Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$2x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad x > 0, y > 0,$$

exempelvis genom att göra variabelbytet

$$\begin{cases} u = \frac{1}{y}, \\ v = xy^2. \end{cases}$$

Bestäm även den lösning som uppfyller  $f(x, 1/x) = 0$  (0.8)

4. Låt  $\gamma$  den övre halvan av ellipsen  $(x - 1)^2 + 4y^2 = 4$ , från  $(3, 0)$  till  $(-1, 0)$ .

a) Beräkna  $I = \int_{\gamma} -y dx + 1 dy$ . (0.5)

b) Beräkna  $I = \int_{\gamma} (e^{y^2} + 1) dx + (2xye^{y^2} - 1) dy$ . (0.5)

Var god vänd!

5. Låt  $f$  vara en funktion i en variabel sådan att  $f(4) = 1$ ,  $f'(4) = 2$  och  $f''(4) = 3$ , och studera sammansättningen  $u(x, y) = f(x^2 + 2y^2)$ .

a) Rita nivåkurvan  $u(x, y) = 1$ . (Du får här anta att  $f$  är strängt monoton.) (0.2)

b) Beräkna alla partiella derivator, upp till ordning 2, av  $u$  i punkten  $(\sqrt{2}, 1)$ . Ange också Taylorpolynommet av ordning 2 till  $u$  i punkten  $(\sqrt{2}, 1)$ . (0.8)

6. Låt  $K$  vara klotet som ges av  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ .

a) Genom avbildningen

$$\begin{cases} u = x, \\ v = y, \\ w = z^3, \end{cases}$$

överförs  $K$  på en kropp  $L$ . Bestäm volymen av  $L$ . (0.3)

b) Ur  $K$  borraras ett hål med radie 1 och  $z$ -axeln som centrum. Sedan borraras ett hål till med radie 1, nu med  $y$ -axeln som centrum. Beräkna volymen av det utborrade materialet. (0.7)

*LYCKA TILL!*