LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Flerdimensionell analys
2017-10-25, Lösningar

1. Vi kan beskriva området med olikheterna $D : 0 \le y \le x,\ 1 \le x \le 2$, vilket ger

$$\iint_D \frac{1}{1+y}\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^x \frac{1}{1+y}\,dy\right) dx = \int_1^2 [\ln(1+y)]_0^x\,dx = \int_1^2 (\ln(1+x) - \ln 1)\,dx =$$
$$= [x\ln(1+x)]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{1+x}\,dx = 2\ln 3 - \ln 2 - \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1+x}\,dy\right) dx =$$
$$= 2\ln 3 - \ln 2 - [x - \ln(1+x)]_1^2 = 2\ln 3 - \ln 2 - \big(2 - \ln 3 - (1 - \ln 2)\big) =$$
$$= \underline{3\ln 3 - 2\ln 2 - 1}.$$

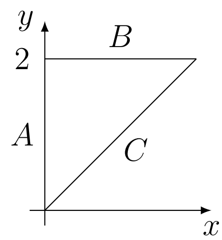
2. a) Vi beräknar

$$f'_x = 1\cdot e^x + (1 + x - y^2)e^x = (2 + x - y^2)e^x \qquad \text{och} \qquad f'_y = -2ye^x,$$

vilket speciellt ger $f'_x(0,2) = -2$ och $f'_y(0,2) = -4$. Tangentplanet får därför ekvation

$$z = -3 - 2(x-0) - 4(y-2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{2x + 4y + z - 5 = 0}.$$

b) Derivatorna ovan ger den stationära punkten $(-2,0)$, som dock ligger utanför vårt område. Vi undersöker randen:



- $A : x = 0, 0 < y < 2$. Vi får $f(0,y) = 1 - y^2 = g_1(y)$, och $g_1'(y) = -2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$, vilket svarar mot hörnet $(0,0)$.
- $B : y = 2, 0 < x < 2$. Vi får $f(x,2) = (x-3)e^x = g_2(x)$, och $g_2'(x) = 1\cdot e^x + (x-3)e^x = (x-2)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 2$, vilket svarar mot hörnet $(2,2)$.
- $C : y = x, 0 < x < 2$. Vi får $f(x,x) = (1 + x - x^2)e^x = g_3(x)$, och $g_3'(x) = (1-2x)e^x + (1+x-x^2)e^x = (2 - x - x^2)e^x = 0 \Leftrightarrow$ $x^2 + x - 2 = 0$, vilken har lösningarna $x = 1$ och $x = -2$. Den andra lösningen svarar mot en punkt utanför vårt område, men vi beräknar $g_3(1) = \underline{e}$.

Vi beräknar nu värdena i hörnen:

$$f(0,0) = \underline{1}, \quad f(0,2) = \underline{-3}, \quad f(2,2) = \underline{-e^2}.$$

Efter en jämförelse får vi alltså slutligen <u>största värde e</u> och <u>minsta värde $-e^2$</u>.

c) På linjen $x = 0$ gäller det att $f(0,y) = 1 - y^2 \to -\infty$ då $y \to \infty$. På linjen $y = 0$ gäller det att $f(x,0) = (1+x)e^x \to \infty$ då $x \to \infty$. Således <u>saknas både största och minsta värde</u>.

3. a) Se boken sidan 94.

b) Vi byter variabler med det föreslagna variabelbytet. Med hjälp av kedjeregeln får vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = y^2\,\frac{\partial f}{\partial v}.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}\,\frac{\partial f}{\partial u} + 2xy\,\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Vi sätter in dessa derivator i differentialekvationen, och får efter förenkling

$$\frac{1}{y}\,\frac{\partial f}{\partial u} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial u} = y \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{u} \tag{1}$$

Vi löser nu denna ekvation:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{u} \quad\Leftrightarrow\quad f = \ln u + g(v)$$

där g är en funktion av en variabel. Återgång till variablerna x, y ger slutligen

$$\underline{f(x,y) = \ln\frac{1}{y} + g(xy^2).}$$

Randvillkoret vi får givet ger

$$f(x,1/x) = \ln x + g\Big(\frac{1}{x}\Big) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad g\Big(\frac{1}{x}\Big) = -\ln x, \quad \text{vilket ger} \quad g(t) = -\ln\frac{1}{t}$$

Vi får därför slutligen lösningen

$$f(x,y) = \ln\frac{1}{y} - g(xy^2) = \ln\frac{1}{y} - \ln\frac{1}{xy^2} = \ln xy^2 - \ln y = \ln\frac{xy^2}{y} = \underline{\ln xy}.$$

4. a) Vi kan parametrisera γ enligt $(x(t), y(t)) = (2\cos t + 1, \sin t)$, $t : 0 \to \pi$, så

$$I = \int_\gamma -y\,dx + 1\,dy = \int_0^\pi (-\sin t(-2\sin t) + 1\cos t)\,dt = \int_0^\pi \big(2\sin^2 t + \cos t\big)\,dt =$$
$$= \int_0^\pi (1 - \cos 2t + \cos t)\,dt = \Big[t - \frac{\sin 2t}{2} + \sin t\Big]_0^\pi = \underline{\pi}.$$

b) Med $(P,Q) = (e^{y^2} + 1, 2xye^{y^2} - 1)$ gäller det att $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, så vi letar efter en potentialfunktion, dvs. en funktion U som uppfyller att $(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}) = (P,Q)$:

$$U = \int P\,dx = xe^{y^2} + x + \varphi(y),$$

vilket ger $\frac{\partial U}{\partial y} = 2xye^{y^2} + 0 + \varphi'(y)$. Jämför vi detta med Q ser vi att $\varphi'(y) = -1$, så vi kan välja $\varphi(y) = -y$. Vi får då potentialfunktionen $U(x,y) = xe^{y^2} + x - y$, och kurvintegralen blir

$$I = U(-1,0) - U(3,0) = -e^0 - 1 - (3e^0 + 3) = \underline{-8}.$$

5. a) Nivåkurvan $u(x,y) = f\bigl(x^2+2y^2\bigr) = 1$ blir, då $f(4) = 1$, ellipsen $x^2+2y^2 = 4$ med halvaxlarna 2 respektive $\sqrt{2}$.

b) I punkten $(\sqrt{2},1)$ blir $x^2+2y^2 = 4$, och vi får följande med hjälp av kedjeregeln:

$$
\begin{aligned}
u'_x &= f'\bigl(x^2+2y^2\bigr)\cdot 2x \quad\Rightarrow\quad u'_x(\sqrt{2},1) = f'\bigl(4\bigr)\cdot 2\sqrt{2} = 2\cdot 2\sqrt{2} = \underline{4\sqrt{2}},\\
u'_y &= f'\bigl(x^2+2y^2\bigr)\cdot 4y \quad\Rightarrow\quad u'_y(\sqrt{2},1) = f'\bigl(4\bigr)\cdot 4 = 2\cdot 4 = \underline{8},\\
u''_{xx} &= f''\bigl(x^2+2y^2\bigr)\cdot 2x\cdot 2x + f'\bigl(x^2+2y^2\bigr)\cdot 2 \quad\Rightarrow\\
u''_{xx}(\sqrt{2},1) &= f''\bigl(4\bigr)\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} + f'\bigl(4\bigr)\cdot 2 = 3\cdot 8 + 2\cdot 2 = \underline{28},\\
u''_{yy} &= f''\bigl(x^2+2y^2\bigr)\cdot 4y\cdot 4y + f'\bigl(x^2+2y^2\bigr)\cdot 4 \quad\Rightarrow\\
u''_{yy}(\sqrt{2},1) &= f''\bigl(4\bigr)\cdot 4\cdot 4 + f'\bigl(4\bigr)\cdot 4 = 3\cdot 16 + 2\cdot 4 = \underline{56},\\
u''_{xy} = u''_{yx} &= f''\bigl(x^2+2y^2\bigr)\cdot 2x\cdot 4y \quad\Rightarrow\\
u''_{xy}(\sqrt{2},1) = u''_{yx}(\sqrt{2},1) &= f''\bigl(4\bigr)\cdot 2\sqrt{2}\cdot 4 = 3\cdot 8\sqrt{2} = \underline{24\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Taylorpolynomet av ordning 2 till u i punkten $(\sqrt{2},1)$ blir därför, då $u(\sqrt{2},1) = f(4) = 1$,

$$
\begin{aligned}
p_2(x,y) &= u(\sqrt{2},1) + u'_x(\sqrt{2},1)(x-\sqrt{2}) + u'_y(\sqrt{2},1)(y-1) +\\
&+ \tfrac{1}{2}\Bigl(u''_{xx}(\sqrt{2},1)(x-\sqrt{2})^2 + 2u''_{xy}(\sqrt{2},1)(x-\sqrt{2})(y-1) + u''_{yy}(\sqrt{2},1)(y-1)^2\Bigr) =\\
&= \underline{1 + 4\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) + 8(y-1) + 14(x-\sqrt{2})^2 + 24\sqrt{2}(x-\sqrt{2})(y-1) + 28(y-1)^2}.
\end{aligned}
$$

6. a) Vi beräknar funktionaldeterminanten

$$
\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3z^2 \end{vmatrix} = 3z^2,
$$

och variabelbyte enligt den givna avbildningen ger att volymen vi söker blir

$$
V = \iiint_L 1\,dudvdw = \iiint_K \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}\,dxdydz = \iiint_K 3z^2\,dxdydz.
$$

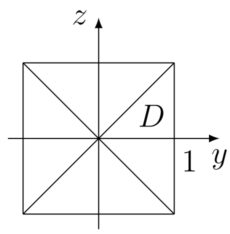
Med rymdpolära koordinater övergår K i $J: 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$, och vi får

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_K 3z^2\,dxdydz = \iiint_J 3(r\cos\theta)^2 r^2 \sin\theta\,drd\theta d\varphi =\\
&= 3\int_0^2 r^4 dr \int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi =\\
&= 3\cdot 2\pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi = 6\pi\cdot\tfrac{32}{5}\cdot\tfrac{2}{3} = \underline{\frac{128\pi}{5}}.
\end{aligned}
$$

b) Vi börjar med att beräkna volymen av det första hålet, längs z-axeln. Vi har då en undre yta $z = -\sqrt{4-(x^2+y^2)}$ samt en övre $z = \sqrt{4-(x^2+y^2)}$, och aktuellt område i xy-planet är enhetscirkelskivan, som med polära koordinater övergår i $E : 0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Volymen blir därför

$$\begin{aligned}
V_1 &= \iint_D \sqrt{4-(x^2+y^2)} - (-\sqrt{4-(x^2+y^2)})\,dxdy = \\
&= 2\iint_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}\,dxdy = 2\iint_E \sqrt{4-r^2}\,r\,drd\varphi = 2\int_0^1 \sqrt{4-r^2}\,r\,dr \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi \\
&= 2\cdot 2\pi\left[-\tfrac{1}{3}(4-r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}(4^{3/2}-3^{3/2}) = \frac{4\pi}{3}(8-3\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Vi kan nu inte bara lägga till en lika stor volym för det andra hålet, för då räknar vi volymen av den kropp K' som tillhör båda hålen två gånger. Kroppen K' begränsas av cylindrarna $x^2+y^2=1$ längs z-axeln och $x^2+z^2=1$ längs y-axeln. Sedd från positiva x-axeln ser alltså K' ut som i figuren. (Notera speciellt att cylindarna skär varandra då $y = \pm z$.) Vi beräknar arean över området D. Här begränsas K' av $x^2+y^2=1$, så vi får en undre yta $x = -\sqrt{1-y^2}$ och en övre $x = \sqrt{1-y^2}$. Volymen, som på grund av symmetri blir en åttondel av den totala, blir



$$\begin{aligned}
V_s &= \iint_D \sqrt{1-y^2} - (-\sqrt{1-y^2})\,dxdy = 2\iint_D \sqrt{1-y^2}\,dxdy = \\
&= 2\int_0^1 \left(\int_0^y \sqrt{1-y^2}\,dz\right) dy = 2\int_0^1 \left[z\sqrt{1-y^2}\right]_0^y dy \\
&= 2\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy = 2\left[-\tfrac{1}{3}(1-y^2)^{3/2}\right]_0^1 = 2\left(\tfrac{1}{3}-0\right) = \tfrac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Den totala volymen av K' blir således $8\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{3}$. Vi kan nu slutligen få fram volymen av det utborrade materialet som

$$V = 2V_1 - V_s = \underline{\frac{8\pi}{3}(8-3\sqrt{3}) - \tfrac{16}{3}}.$$