LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2013-10-21, kl 8-13

INGA HJÄLPMEDEL. Motivera lösningarna väl. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade om inget annat anges.

1. Bestäm för varje reellt tal a antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1, \\ 2x + ay - 4z = 3, \\ x - 3y + az = 2. \end{cases}$$

2. Bestäm det kortaste avståndet mellan punkten $(3, 1, -3)$ och linjen genom punkterna $(2, 1, 2)$ och $(3, 3, 5)$.

3. Ge definitionen av att en kvadratisk matris är diagonaliserbar. Diagonalisera också matrisen

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Lös matrisekvationen

$$\mathsf{AX} = 2\mathsf{X} + \mathsf{A}^T,$$

där

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Finn en ortonormerad positivt orienterad bas $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ sådan att $\mathbf{e}_1'$ är parallell med vektorn $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ och $\mathbf{e}_3'$ är ortogonal mot vektorn $\mathbf{v} = (3, 3, 6)$. Bestäm också koordinaterna för $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i den nya basen.

6. Punkterna i planet roteras först $\pi/2$ i positiv led kring origo varefter de speglas ortogonalt i linjen $2x + y = 0$. Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen. Den sammansatta avbildningen har en direkt geometrisk tolkning (utan sammansättning). Finn denna geometriska tolkning, till exempel med diagonalisering.

LYCKA TILL!