

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara tydliga och försedda med ordentliga motiveringar och svar. Om inget annat anges så kan samtliga baser antas vara ortonormerade och positivt orienterade.

1. En linje  $\ell$  bestäms som skärningen av planen  $x - y - 3z = 2$  och  $x + y - z = 0$ . Finn den punkt  $P$  på  $\ell$  som har kortast avstånd till punkten  $Q : (3, -1, 2)$  och bestäm avståndet mellan  $P$  och  $Q$ .

2. Låt

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \\ -7 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna  $AX_0$ . (0.1)

(b) Bestäm alla vektorer  $X$  sådana att  $AX = X$ . (0.4)

(c) Matrisen  $A$  är avbildningsmatris för rotation kring en viss linje i rummet. Vilken? (0.2)

(d) Med hur stor vinkel sker rotationen? (0.3)

3. Låt  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  vara en godtycklig (ej nödvändigtvis ortonormerad) bas i rummet, och låt

$$\hat{e}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3, \quad \hat{e}_2 = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \quad \hat{e}_3 = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2.$$

Visa att  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  utgör en bas för rummet. Låt vidare  $\bar{v} = (1, 2, 3)$  uttryckt i basen  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  och  $\bar{e}_3$ . Bestäm koordinaterna  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  för  $\bar{v}$  i basen  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ .

4. (a) Bestäm  $t$  så att rangen för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & t & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

är två. (0.5)

- (b) Förklara med ord, utan att göra någon uträkning, varför

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{och} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (0.5)$$

5. De tre studenterna Adan, Bent och Cam går till fiket Fiket. Adan beställer fyra fikon, en kopp te och tio chokladbitar till en kostnad av 110 kronor. Bent beställer tre fikon, en kopp te och sju chokladbitar och får för detta betala 85 kronor. Hur mycket får Cam betala för ett fikon, en kopp te och en chokladbit? Får vi tillräckligt med information ovan för att veta vad en kopp te kostar på fiket Fiket?

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Visa att  $-2$  är ett egenvärde till  $A$ . Bestäm sedan talen  $a, b$  och  $c$  (med  $b > c$ ) sådana att  $A$  och  $D$  är likformiga. (Matriserna  $A$  och  $D$  är likformiga om det existerar en inverterbar matris  $S$  sådan att  $A = SDS^{-1}$ .)