Instuderingsfrågor för endimensionell analys 1, ht 2006

Anvisningar:

Avsikten med följande frågor är att hjälpa dig med självkontroll av dina kunskaper. Om du känner dig osäker på svaren bör du slå upp motsvarande avsnitt i läroboken och läsa på ytterligare en gång. Kontrollera gärna med övningsledare och föreläsare om dina svar på frågorna kan anses vara tillfredställande.

Frågorna är indelade efter kapitel i läroboken, och vissa är inringade. På tentamen till och med augusti 2007 hämtas teoriuppgifter från de inringade frågorna. Smärre omformuleringar kan därvid förekomma.

Kap. 0 och Appendix B

1. Vad betyder tecknen $\Rightarrow$ och $\iff$?
2. Redogör för talmängderna **N**, **Z**, **Q** och **R**.
3. Skriv upp och bevisa lösningsformeln för andragradsekvationen
$$x^2 + ax + b = 0.$$
4. Hur får man fram ekvationen för en rät linje a) om man känner riktningskoefficienten och en punkt på linjen b) om man känner två punkter på linjen?

Kap. 1

5. Definiera beteckningen $|x|$.
6. Redogör för metoden med kvadratkomplettering. Vad kan metoden användas till?
7. Skriv upp och härled formeln för en geometrisk summa
$$a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n.$$
8. Skriv upp och bevisa faktorsatsen för polynom.
9. Definiera beteckningarna $n!$ och $\binom{n}{k}$. Vad blir $\binom{n}{0}$ och $\binom{n}{1}$?
10. Skriv $(a+b)^5$ som en summa. Skriv upp den allmänna binomialsatsen.
11. Visa att
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$
12. Beskriv vad som menas med en funktion, och funktionens definitionsmängd och värdemängd.
13. Vad menas med inversen f^{-1} till en funktion f? Har alla funktioner en invers? När finns en invers?
14. Låt f vara en funktion med definitionsmängd och värdemängd i **R**. Vad menas med grafen av f?
15. Illustrera en funktion i intervallet $1 \le x < \infty$ som är både strängt växande och uppåt begränsad.

16. Definiera begreppen jämn respektive udda funktion.

17. Ge tre exempel på en jämn funktion och tre exempel på en udda funktion.

18. Uttryck av formen $f(x)^{g(x)}$ kan skrivas om med hjälp av funktionerna exp och ln. Hur då? Ange minst en användning av detta förfarande.

19. Kontrollera att Du kan de olika lagarna för potenser och logaritmer genom att skriva om

$$a^{\alpha}a^{\beta} = \qquad , \qquad (a^{\alpha})^{\beta} = \qquad , \qquad a^{\alpha}b^{\alpha} = \qquad ,$$

$${}^{a}\log(st) = \qquad , \qquad {}^{a}\log\frac{s}{t} = \qquad , \qquad {}^{a}\log(s^{t}) = \qquad .$$

20. Bevisa logaritmlagarna med utgångspunkt från potenslagarna.

21. Definiera de trigonometriska funktionerna $\cos x$, $\sin x$ respektive $\tan x$.

22. Definiera $\arcsin x$ respektive $\arctan x$.

23. Bevisa att

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

24. Redogör för hjälpvinkelmetoden vid behandling av uttryck av formen

$$A\cos\omega x + B\sin\omega x.$$

Vad kan metoden användas till?

25. Kontrollera att Du kan de vanliga trigonometriska additionsformlerna. Ge formler för dubbla vinkeln.

26. Härled med hjälp av betraktelser i enhetscirkeln olikheterna

$$\sin x < x < \tan x$$

för $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Kap. 2

27. Vad menas med att ”$f(x) \to A$ då $x \to \infty$”?

28. Vad menas med att ”$f(x) \to A$ då $x \to x_0$”?

29. Definiera innebörden i uttrycket ”funktionen f är kontinuerlig i punkten x_0”.

30. Skissera beviset för att

$$\frac{e^x}{x} \to \infty, \quad x \to \infty.$$

31. Låt $\alpha > 0$ och $a > 1$. Arrangera funktionerna $x^{\alpha}, \ln x$ och a^x i storleksordning för stora värden på x. Precisera svaret i form av gränsvärden då $x \to \infty$.

32. Vad händer när $x \to 0^+$ med

a) $\ln x$, b) x^{α}, c) $x^{\alpha}\ln x$?

33. Bevisa standardgränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

34. Definiera talet e.

35. Visa att

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1, \quad x \to 0,$$

genom att använda att $(1+\frac{1}{t})^t \to e$ då $t \to \pm\infty$.

36. Lär dig standardgränsvärdena nummer (23) till (34) på sidorna 155–156 i läroboken.

37. Vad menas med att ”serien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ är konvergent”?

38. Låt $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ vara en konvergent serie. Vad menas med seriens summa?

39. Visa att den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ är konvergent om $|x| < 1$ och har summan $\dfrac{1}{1-x}$.

40. Vad menas med en lodrät respektive sned asymptot till en funktionskurva $y = f(x)$?

41. Hur bestämmer du

a) en lodrät asymptot, b) en sned asymptot?

Kap. 3

42. Definiera beteckningen $f'(x_0)$.

43. Visa att om f är deriverbar i x_0 så är f kontinuerlig i x_0.

44. Rita en funktion som i $x = 0$ är

a) diskontinuerlig, b) kontinuerlig men ej deriverbar, c) deriverbar.

45. Ange en fysikalisk tolkning av uttrycket $f'(x_0)$

46. Vad menas med tangenten till en funktionskurva $y = f(x)$ i en punkt $(x_0, f(x_0))$ på grafen? Svara såväl med ord som i form av en ekvation.

47. Hur bestämmer du tangenten till en funktionskurva $y = f(x)$ i en given punkt $(x_0, f(x_0))$?

48. Definiera innebörden i uttrycket ”f har lokalt minimum i punkten x_0”.

49. Vad menas med en lokal extrempunkt?

50. Antag att x_0 är en inre punkt i definitionsmängden till f och att f är deriverbar i x_0. Visa att om f har ett lokalt minimum i x_0 så är $f'(x_0) = 0$.

51. Härled derivatan av $\ln x$, $x > 0$, genom att utgå från derivatans definition. Ledning: använd standardgränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

52. Härled derivatan av e^x genom att utgå från derivatans definition. Ledning: använd standardgränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

53. Härled derivatan av $\sin x$ genom att utgå från derivatans definition. Ledning: använd standardgränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

54. Härled derivatorna av $\arcsin x$ och $\arctan x$.

55. Härled formeln för derivatan av a) $f(g(x))$, b) $f^{-1}(x)$ c) $f(x)g(x)$.

56. Formulera medelvärdesatsen och förklara dess innehåll med en figur.

57. Vad gäller för en funktion vars derivata är i ett helt intervall är a) positiv b) negativ c) noll? Bevisa hur svaren följer av medelvärdesatsen.

Kap. 4

58. Hur hittar du eventuella lokala extrempunkter till en deriverbar funktion?

59. Hur löser du ett optimeringsproblem med hjälp av derivata?

60. Hur skisserar du huvuddragen av en funktionskurva $y = f(x)$?

Appendix A

61. Definiera följande tre beteckningar för komplexa tal z: $|z|$, $\overline{z}$ och $\arg z$.

62. Hur tolkas följande operationer i det komplexa talplanet

    a) $|z|$, b) $\overline{z}$, c) att addera w till z, d) att multiplicera z med w?

63. Definiera beteckningen e^{ix} där x är ett reellt tal.

64. Skriv upp och härled Eulers formler.

65. Visa att

$$e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

    för alla reella tal x och y.

66. Hur gör du för att skriva ett komplext tal $a + ib$ på polär form?

67. Hur gör du omvänt, skriver ett polärt framställt tal $re^{i\theta}$ på rektangulär form $a + ib$?

68. Antag att polynomet

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

    har reella koefficienter. Visa att om $p(\alpha) = 0$ så är även $p(\overline{\alpha}) = 0$.

69. Vad säger algebrans fundamentalsats?

70. Visa att varje komplext polynom kan faktoriseras i (komplexa) förstagradsfaktorer.

71. Visa att att varje reellt polynom kan faktoriseras i reella faktorer av högst graden två.

72. Hur löser du en andragradsekvation med komplexa koefficienter?

73. Hur löser du ekvationen $z^n = w$?