# Instuderingsfrågor för endimensionell analys 2, 2006–2007

## Anvisningar:

Avsikten med följande frågor är att hjälpa dig med självkontroll av dina kunskaper. Om du känner dig osäker på svaren bör du slå upp motsvarande avsnitt i läroboken och läsa på ytterligare en gång. Kontrollera gärna med övningsledare och föreläsare om dina svar på frågorna kan anses vara tillfredställande.

Frågorna är indelade efter kapitel i läroboken, och vissa är inringade. På tentamen till och med augusti 2007 hämtas teoriuppgifter från de inringade frågorna. Smärre omformuleringar kan därvid förekomma.

## Kap. 5

1. Definiera vad som menas med uttrycket ”$F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$”.
2. Bevisa att två primitiver $F$ och $G$ till samma funktion $f$ är lika så när som på en konstant.
3. Bevisa formeln för partiell integration

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx,$$

   där $F$ är en primitiv till $f$.

4. Ange ett par exempel där det är lämpligt att använda partiell integration.
5. Bevisa formeln för variabelbyte i en primitiv funktion $F$ till $f$:

$$F(g(t)) = \int f(g(t))g'(t)\,dt + C.$$

6. Ange några vanliga variabelbyten.
7. Beskriv ansatsprinciperna vid partialbråksuppdelning.
8. Hur bestämmer man ansatskoefficienterna i en partialbråksansats?

## Kap. 6

9. Vilket problem ligger bakom integralens definition?
10. Beskriv sambandet mellan $\int_a^b f(x)\,dx$ och en s.k. Riemannsumma

$$\sum_1^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

   där $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ och $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$.

11. Lär dig räknelagarna för integraler, nr. (9) till (12) s. 292 i läroboken.
12. Visa triangelolikheten för integraler

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|dx$$

   med hjälp av räknelagarna.

13. Formulera integralkalkylens medelvärdessats och förklara den med hjälp av en figur.

14. Låt $f$ vara kontinuerlig i $a \leq x \leq b$. Använd integralkalkylens medelvärdessats för att bevisa analysens huvudsats:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad a < x < b.$$

15. Låt $f$ vara kontinuerlig i $a \leq x \leq b$. Använd huvudsatsen för att bevisa insättningsformeln:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

där $F$ är en (godtycklig) primitiv till $f$.

16. Hur startar du en beräkning av en integral av formen

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx?$$

17. Definiera vad som menas med uttrycket ”den generaliserade integralen $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent”.

18. Redogör för olika typer av generaliserade integraler. Hur beräknar man dem (om de är konvergenta)?

19. För vilka $\alpha$ är följande generaliserade integraler konvergenta:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx.$$

20. Hur lyder jämförelsesatsen för generaliserade integraler av formen $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$? Illustrera med en figur!

## Kap. 7

21. En tunn tråd längs $x$–axeln mellan $a$ och $b$ har den variabla densiteten $\rho(x)$ (i t.ex. kg/m). Resonera dig fram till en formel för trådens massa!

22. Resonera dig fram till formeln

$$\pi \int_a^b f(x)^2\,dx$$

för volymen av en rotationskropp.

23. Resonera dig fram till den s.k. skivformeln

$$\int_a^b A(x)\,dx$$

för volymen av en kropp.

24. Låt $(x,y) = (x(t),y(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta$, vara en kurva i parameterform. Resonera dig fram till uttrycket

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

för den infinitesimala båglängden. Vilken formel ger det för kurvans längd?

25. Resonera dig fram till formeln

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

för arean av en rotationsyta.

26. Definiera vad som menas med uttrycket ”serien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ är konvergent”.

## Kap. 8

27. Vad menas med en lösning till differentialekvationen $y' = f(x,y)$? Visa att $y = e^{x^2}$ är en lösning till $y'' - 2xy' - 2y = 0$.

28. Redogör för begreppet resonans i samband med differentialekvationer av formen

$$y'' + by = h(t), \qquad b > 0.$$

29. Hur löser du en differentialekvation av formen

    a) $y' + g(x)y = h(x)$,

    b) $g(y)y' = h(x)$?

30. Visa att den allmänna lösningen till differentialekvationen $y' = ay$ är $y = Ce^{ax}$.

31. Hur behandlar du en integralekvation av t.ex. formen

$$y(x) = \int_0^x f(t)y(t)\,dt?$$

32. Redogör för innebörden i framställningen

$$y = y_h + y_p$$

av lösningarna till en differentialekvation av formen

$$y'' + ay' + by = g(x).$$

33. Hur bestämmer du $y_h$ i föregående uppgift om $a$ och $b$ är konstanter?

34. Hur hittar du $y_p$ när $g(x)$ är av formen

    a) konstant,
    b) polynom,
    c) polynom $\cdot e^{\alpha x}$,
    d) polynom $\cdot \cos\beta x$ (alternativt $\sin\beta x$),
    e) en summa av funktioner av ovanstående form

35. Visa att den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

är $y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$

**Kap. 9**

36. Ange något skäl för att Maclaurinpolynomet

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

troligtvis utgör en god approximation av $f(x)$ nära 0. Varför vill man approximera med polynom?

37. Skriv upp MacLaurins formel med Lagranges restterm.

38. Ange felet i form av Lagranges restterm vid approximation av $f(x)$ med polynomet $p_n(x)$ i föregående uppgift.

39. Härled Maclaurinutvecklingen för $f(x) = \ln(1+x)$ med $n = 3$ och med Lagranges restterm.

40. Visa med Maclaurinutveckling att

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$