# Instuderingsfrågor i Diskret matematik

## Kapitel 1. Inledande kombinatorik

1. Ge exempel på kombinatoriska problem där man använder

   a) additionsprincipen, b) multiplikationsprincipen.

2. Ge det algebraiska uttrycket för binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$. Vilket kombinatoriskt problem är $\binom{n}{k}$ svar på?

3. Ange antalet heltalslösningar till $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r, \quad x_i \geq 0$. Formulera detta som ett fördelningsproblem och som ett urvalsproblem.

4. Hur många

   a) permutationer/arrangemang, b) kombinationer

   av $r$ objekt från $n$ olika finns det om man drar

   1° utan återläggning, 2° med återläggning?

5. Skriv upp och bevisa kombinatoriskt den rekursiva formel för binomialkoefficienter som åskådliggöres i Pascals triangel.

6. Skriv upp binomialsatsen. Bevisa den.

7. Visa formeln $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ såväl kombinatoriskt som algebraiskt. Vad gäller för $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$?

8. Vad menas med en multinomialkoefficient? Vilket kombinatoriskt problem är multinomialkoefficienter svaret på? Skriv upp multinomialsatsen.

## Kapitel 2. Begrepp och terminologi från mängdläran

9. Vad menas med

   a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, c) $A \Delta B$, d) $A \setminus B$, e) $\mathcal{P}(A)$?

10. Formulera och bevisa på några olika sätt de Morgans regler.

11. Ge en formel för $|A \cup B|$.

## Kapitel 3. Metoden med inklusion/exklusion

12. Formulera och bevisa satsen om inklusion och exklusion.

13. Visa att antalet *derangements* av $n$ objekt är approximativt $e^{-1}n!$.

### Kapitel 4. Hela tal

14. Redogör för hur man genomför ett induktionsbevis.

15. Ge den rekursiva definitionen av Fibonaccitalen.

16. Vad menas med att $a \mid b$, när $a$ och $b$ är hela tal? Visa att denna relation är transitiv.

17. Formulera den sats som kallas divisionsalgoritmen.

18. Definiera begreppet största gemensam delare till två hela tal. Hur finner man en sådan med hjälp av Euklides' algoritm?

19. a) Formulera och bevisa villkor för lösbarhet av den diofantiska ekvationen
$$ax + by = c.$$
    b) Hur finner man samtliga lösningar?

20. Formulera och bevisa aritmetikens fundamentalsats.

### Kapitel 5. Funktioner och relationer

21. Kontrollera att Du behärskar all terminologi i samband med funktionsbegreppet.

22. Låt $A$ vara en mängd med $m$ element och $B$ en mängd med $n$ element.
    a) Hur många funktioner från $A$ till $B$ finns det?
    b) Hur många av dessa funktioner är injektiva?
    c) Hur många av dessa funktioner är surjektiva?
    d) Hur många av dessa funktioner är bijektiva?

23. Härled formeln för antalet surjektiva funktioner från $A$ till $B$.

24. Vad menas med en binär operation på en mängd? Vad menas med att en sådan är $1^\circ$ associativ, $2^\circ$ kommutativ?

25. Vad menas med lådprincipen?

26. Vilket kombinatoriskt problem löses av $S(m,n)$ (Stirlingtal av andra slaget)?

27. Ange en rekursiv formel för $S(m,n)$. Ge ett kombinatoriskt bevis.

28. Om $A$ har $m$ element och $B$ har $n$ element, hur många relationer finns det från $A$ till $B$?

29. Definiera begreppen reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk, transitiv relation. Ge exempel.

30. a) Vad menas med en partiell ordningsrelation? Ge exempel.
    b) Vad menas med en total ordningsrelation? Ge exempel.

31. Vad menas med en ekvivalensrelation? Ge exempel.

32. Visa att en ekvivalensrelation på en mängd $A$ ger upphov till en partition av $A$ och omvänt.

## Kapitel 6. Mer talteori. Ringar

33. Vad menas med en ring? Ge exempel både på kommutativa och på icke-kommutativa ringar.

34. Visa att i en ring är a) nollan $z$, b) den additiva inversen $-a$, c) eventuell etta $u$, d) eventuell multiplikativ invers $a^{-1}$ entydigt bestämda.

35. Visa räknereglerna $az = za = z$ och $a(-b) = (-a)b = -ab$ i en ring.

36. Visa att om ringen $R$ saknar äkta nolldelare så gäller annulleringslagen

$$c \neq z,\ ac = bc \quad \Longrightarrow \quad a = b.$$

37. a) Definiera begreppet kropp.

    b) Ge exempel på en ring som är en kropp och på en ring som inte är en kropp.

38. Vad menas med att $a \equiv b \bmod n$? Visa att detta är en ekvivalensrelation på $\mathbf{Z}$.

39. a) Definiera $\mathbf{Z}_n$.

    b) Definiera operationerna $+$ och $\cdot$ på $\mathbf{Z}_n$ och visa att de är väldefinierade.

40. Visa att $[a]$ är inverterbart i $\mathbf{Z}_n$ om och endast om $a$ och $n$ är relativt prima. Hur bestämmer man i så fall inversen?

41. Visa att $\mathbf{Z}_n$ är en kropp om och endast om $n$ är ett primtal.

42. Definiera Eulers $\varphi$-funktion och härled en formel för denna.

43. Formulera och bevisa Fermats lilla sats.

44. a) Vad menas med ordningen $o(a)$ av ett element i $\mathbf{Z}_p$, $p$ primtal?

    b) Visa att om $a \in \mathbf{Z}_p$ med $p$ primtal och $a^m = 1$ så $o(a) \mid m$.

45. Vad menas med ett primitivt element i $\mathbf{Z}_p$?

46. Formulera Eulers sats.

47. Vad menas med en 1° homomorfi, 2° isomorfi mellan ringar?

48. Formulera och bevisa kinesiska restsatsen.

## Kapitel 8. Genererande funktion

49. Definiera genererande funktionen till en talföljd $\langle\, a_i \,\rangle$.

50. a) Definiera $\binom{-m}{k}$ för $m > 0$. Skriv om $\binom{-m}{k}$ som en vanlig binomialkoefficient.

    b) Ange koefficienten för $x^r$ i potensserieutvecklingen av $(1-x)^{-n}$?

51. Förklara varför koefficienten $a_r$ för $x^r$ i

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6)^2 (x^3 + x^4 + x^5)^3$$

är lika med antalet sätt att fördela $r$ *lika* objekt i fem olika lådor med 0, 2, 4 eller 6 objekt i de två första lådorna och 3, 4 eller 5 objekt i de tre sista lådorna.

52. Antag att

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^5)(1-x^7)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Förklara varför $a_k$ kan tolkas som antalet partitioner av talet $k$ i 2:or, 5:or och 7:or.

53. Ange minst två olika sätt att bestämma antalet heltalslösningar till

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = r, \qquad 2 \leq c_i \leq 7.$$

54. Hur går man tillväga för att lösa en differensekvation med genererande funktion?

55. Beteckna med $a_r$ koefficienten för $x^r/r!$ i utvecklingen av

$$\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^2.$$

Förklara varför $a_r$ är lika med antalet sätt att fördela $r$ *olika* objekt i tre olika lådor med minst två objekt i den första lådan? Varför är $a_r$ lika med antalet ord av längden $r$ med bokstäverna $A$, $B$ och $C$, där $A$ förekommer minst två gånger?

## Kapitel 9. Grafteori

56. Förklara skillnaden mellan graf, multigraf och riktad graf.

57. Förklara begreppen a) enkel väg, b) längd av väg, c) grad av nod, d) komplement till en graf.

58. Varför har den fullständiga grafen $K_n$ exakt $\binom{n}{2}$ bågar?

59. Vad menas med en a) Eulercykel, b) Hamiltoncykel?

60. Vad säger Euler-Hierholzers sats? Ge bevis.

61. Ange nödvändiga villkor för att en graf skall innehålla en Hamiltoncykel.

62. Ge tillräckliga villkor för att en graf skall innehålla en Hamiltoncykel.

63. Formulera i detalj och bevisa Eulers polyederformel.

64. Visa att graferna $K_n$, $n \geq 5$, och $K_{m,n}$, $m, n \geq 3$, inte är planära.

65. Formulera Kuratowskis sats.

66. Definiera begreppen a) äkta färgning, b) kromatiskt tal, c) kromatiskt polynom.

67. Visa att

$$P(G, \lambda) = P(G-e, \lambda) - P(G_e, \lambda).$$

(Förklara själv beteckningarna.)

68. Förklara varför det kromatiska polynomet faktiskt är ett polynom.

69. Beskriv tre metoder att finna det kromatiska polynomet till en graf.

70. Förklara sambandet mellan binära relationer och riktade grafer.