# Instuderingsfrågor i Integralkalkyl för Bi
**ht 2008**

## Kapitel 5

1. Vad menas med uttrycket ”$F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$”.
2. Bevisa att två primitiver $F$ och $G$ till samma funktion $f$ är lika så när som på en konstant.
3. Lär dig de ”elementära primitiverna” på sid. 250–251 i boken.
4. Skriv upp och bevisa formeln för partiell integration.
5. Bevisa formeln för variabelbyte i en primitiv funktion $F$ till $f$:
$$F(g(t)) = \int f(g(t))g'(t)\,dt + C.$$
6. Beskriv ansatsprinciperna vid partialbråksuppdelning samt hur man bestämmer ansatskoefficienterna.

## Kapitel 6

7. Beskriv sambandet mellan $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ och en Riemannsumma $\displaystyle\sum_1^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Förklara själv de ingående beteckningarna. Vad händer då indelningen förfinas?
8. Lär dig räknelagarna för integraler (9)–(13) i läroboken.
9. Visa triangelolikheten för integraler: $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right|dx$ .
10. Formulera integralkalkylens medelvärdessats och förklara den med hjälp av en figur.
11. Formulera analysens huvudsats. Bevisa den med hjälp av integralkalkylens medelvärdessats.
12. Låt $f$ vara kontinuerlig i $a \le x \le b$. Använd huvudsatsen för att bevisa insättningsformeln
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$
där $F$ är en (godtycklig) primitiv till $f$.
13. Definiera vad som menas med uttrycket ”den generaliserade integralen $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ är konvergent”.
14. På vilka sätt kan integraler vara generaliserade? Hur beräknar man dem (om de är konvergenta)?
15. Hur lyder jämförelsesatsen för generaliserade integraler av formen $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$? Illustrera med en figur.

## Kapitel 7

16. Hur beräknar man arean av området mellan två funktionskurvor?
17. En tunn tråd längs $x$-axeln mellan $a$ och $b$ har den variabla densiteten $\rho(x)$ (i t.ex. kg/m). Resonera dig fram till en formel för trådens massa.
18. Då grafen $y = f(x)$, $a \le x \le b$, roterar kring $x$-axeln uppstår en rotationskropp. Resonera dig fram till dels en beräkningsformel för volymen av kroppen, dels en beräkningsformel för den uppkomna rotationsytan.

19. Resonera dig fram till formler för den infinitesimala båglängden $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ då en kurva i planet ges
a) på parameterformen $(x, y) = (x(t), y(t)), \;\; \alpha \leq t \leq \beta$,
b) som grafen av en funktion $y = f(x)$.

20. Kontrollera att du i tyngdpunktsberäkningar förstår hur symboliska integraler som $\int_K x\,dm$ ska översättas till vanliga integraler. Vad betyder $x$ och $dm$ ?

21. Hur kan en summa $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ uppskattas med en integral av $f$, om $f$ är en avtagande (växande) funktion? Rita figur.

## Kapitel 8

22. Hur löser man en differentialekvation av formen
a) $y' + g(x)y = h(x)$? b) $g(y)y' = h(x)$?

23. Visa att den allmänna lösningen till differentialekvationen $y' = ay$ är $y = Ce^{ax}$.

24. Hur behandlar du en integralekvation av t.ex. formen

$$y(x) = \int_0^x f(t)y(t)\,dt \;?$$

25. Redogör för innebörden i framställningen $y = y_h + y_p$ av lösningarna till en differentialekvation av formen $y'' + ay' + by = g(x)$.

26. Ange $y_h$ i föregående uppgift om $a$ och $b$ är konstanter. Vilka olika fall måste särskiljas?

27. Hur hittar du $y_p$ när $g(x)$ är av formen
a) konstant,
b) polynom,
c) polynom $\cdot e^{\alpha x}$,
d) polynom $\cdot \cos \beta x$ (alternativt $\sin \beta x$),
e) en summa av funktioner av ovanstående form?

28. Visa att den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

är $y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$. Ge en fysikalisk tolkning av resultatet.

29. Vad menas med resonans, och när kan resonans uppträda?

## Kapitel 9

30. Skriv upp Maclaurins formel med Lagranges restterm.

31. Varför utgör Maclaurinpolynomet $p_n(x)$ en god approximation av $f(x)$ nära $0$? Varför vill man approximera med polynom?

32. Hur avgör man hur noggrann approximationen i föregående fråga är?

33. Skriv upp Taylors formel (utveckling kring $x = a$) med Lagranges restterm.

34. Skriv upp början av standardutvecklingarna (4)–(9) i läroboken. Se till så att du vid behov genom derivation kan härleda resttermen då $n = 3, 4$ eller $5$ för formlerna (4)–(9).

35. Visa med Maclaurinutveckling att $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ för varje $x \in \mathbb{R}$ .