LÖSNINGAR **FMAF01–FUNKTIONSTEORI**
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **2019-03-18, 08:00–13:00**

Hjälpmedel: Bifogat formelblad. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara, läsvärda och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna, om möjligt, tydliga och enkla svar.

1. Finns det någon holomorf funktion $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ på $\mathbb{C}$ vars realdel ges av $u(x,y) = (1+xy)(x^2-y^2)$? Bestäm i sådana fall samtliga sådana, och uttryck dem som funktion av $z = x+iy$.

   Lösning Man kontrollerar enkelt att u är harmonisk ($\Delta u = 0$), varför det enligt teorin finns holomorfa funktioner $f = u + iv$. För att finna alla funktioner f använder vi Cauchy–Riemanns ekvationer för att bestämma harmoniska konjugat v till u. Integrering av $v'_x = -u'_y = -x^3 + 3xy^2 + 2y$ med avseende på x ger $v(x,y) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + 2xy + \phi(y)$, varför en derivering med avseende på y ger att

$$3x^2y + 2x + \phi'(y) = v'_y = u'_x = -y^3 + 3x^2y + 2x$$

   Därmed gäller det att $\phi(y) = -\frac{1}{4}y^4 + C$ för någon reell konstant C. Alltså blir $v(x,y) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + 2xy + C$, och

$$f(x+iy) = (1+xy)(x^2-y^2) + i\left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + 2xy + C\right).$$

   Vidare observerar vi att $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}ix^4 + iC$ för $x \in \mathbb{R}$. Det gäller alltså att den hela funktionen f på reella axeln är lika med den hela funktionen $g(z) = z^2 - \frac{1}{4}iz^4 + iC$, varför identitetssatsen säger att f måste vara lika med g på hela $\mathbb{C}$, dvs att $f(z) = z^2 - \frac{1}{4}iz^4 + iC$, $C \in \mathbb{R}$.

2. Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z+3}$$

   i en potensserie centrerad i $1+3i$. Vilken konvergensradie får potensserien?

   Lösning (med geometrisk serie) Vi skriver $z + 3 = (4+3i) + (z-1-3i)$, bryter ut $4+3i$, och får

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{4+3i}\frac{1}{1+\frac{z-1-3i}{4+3i}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(4+3i)^{k+1}}(z-1-3i)^k.$$

   Konvergens fås precis då $|z-1-3i| < |4+3i| = 5$. Konvergensradien blir alltså 5 (vilket förstås är avståndet från $1+3i$ till polen -3).

Lösning (med derivering) Upprepad derivering ger vid hand att

$$f^{(k)}(z) = \frac{(-1)^k k!}{(z+3)^{k+1}}, \qquad \text{dvs.} \qquad f^{(k)}(1+3i) = \frac{(-1)^k k!}{(4+3i)^{k+1}}.$$

Med Taylors formel finner vi att

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(1+3i)}{k!}(z-1-3i)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(4+3i)^{k+1}}(z-1-3i)^k.$$

Konvergensradien fås som i föregående lösning.

3. Uttryck den 2π-periodiska funktionen f, som i intervallet $[-\pi, \pi)$ ges av $f(x) = |x|$, i en trigonometrisk fourierserie. Använd denna fourierserie för att bestämma värdet av *en* av serierna

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Lösning Här gäller det att

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin(kx)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (f \text{ jämn}), \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)\,\mathrm{d}x = 2\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}. \end{aligned}$$

Eftersom f är kontinuerlig och styckvis kontinuerligt deriverbar kommer dess fourierserie att konvergera (likformigt) tillbaka till funktionen f, varför det för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att (här sätter vi $k = 2n-1$ i den andra likheten)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}\cos(kx) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x). \end{aligned}$$

Med $x = 0$ finner vi att $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(2n-1)^2 = \frac{1}{8}\pi^2$. Den tredje serien hade enkelt kunnat beräknas med Parsevals formel (summa $\frac{1}{96}\pi^4$). Den andra och den fjärde serien är ej lika naturliga att beräkna medelst vår fourierserie.

4. Beräkna $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} ke^{-k}\sin(kx)\,\mathrm{d}x$ och $\displaystyle\int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-k}\sin(kx)\,\mathrm{d}x$.

Lösning En direkt integrering ger att $\int_0^{\pi} ke^{-k}\sin(kx)\,\mathrm{d}x = e^{-k} - (-e)^{-k}$. Vi summerar de geometriska serierna, och finner att den sökta serien blir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^\pi ke^{-k}\sin(kx)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(e^{-k}-(-e)^{-k}\right)\\ &= \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} - \frac{-e^{-1}}{1-(-e^{-1})} = \frac{2e}{e^2-1}.\end{aligned}$$

Det andra uttrycket vi skall beräkna är lika med det första. Enklast sättet att inse detta — förutom att räkna ut uttrycket — är att inse att serien $\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-k}\sin(kx)$ konvergerar likformigt på intervallet $[0,\pi]$, varför vi kan kasta om ordningen av integrering och summering.

För att verifiera den likformiga konvergensen kan vi använda Weierstraß test. Det gäller att $\|ke^{-k}\sin(kx)\|_{[0,\pi]} = ke^{-k}$ och $\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-k}$ är konvergent. För att påvisa konvergensen av den senare serien kan vi till exempel använda rottestet, kvottestet, eller Cauchys integralkriterium. Man vi kan också via Maclaurinserien för e^k göra uppskattningen

$$0 \le ke^{-k} = \frac{k}{e^k} = \frac{k}{1+k+k^2/2+k^3/6+\cdots} \le \frac{6}{k^2},$$

och sedan fastslå konvergensen genom att jämföra med den konvergenta p-serien $\sum_{k=1}^{+\infty} 6/k^2$.

Sammanfattningsvis är bägge uttrycken alltså lika med $2e/(e^2-1)$.

5. Man kan visa (det behöver du inte göra) att integralerna

$$I_k(x) = \int_0^\pi \frac{\cos(kx)-\cos(kt)}{\cos x - \cos t}\,\mathrm{d}t, \quad k \ge 0$$

för varje $x \in \mathbb{R}$ uppfyller rekursionsekvationen

$$I_{k+2}(x) - 2\cos x\, I_{k+1}(x) + I_k(x) = 0, \quad I_0(x) = 0, \quad I_1(x) = \pi.$$

Lös rekursionsekvationen, och bestäm på så sätt ett uttryck för $I_k(x)$, $k \ge 0$.

Lösning För varje x har vi en homogen rekursionsekvation av ordning två att lösa. Den har karakteristisk ekvation $\mu^2 - 2\cos x\mu + 1 = 0$, vilket ger lösningarna $\mu = e^{\pm ix}$. Om x inte är en heltalsmultipel av π får vi enkelrötter, och I_k kan skrivas som

$$I_k(x) = C_1e^{ikx} + C_2e^{-ikx} = A\cos(kx) + B\sin(kx),$$

där A och B beror av x men inte av k. Sätter vi in $k = 0$ så finner vi att $0 = I_0(x) = A$, så $A = 0$. Sätter vi in $k = 1$ finner vi att $\pi = I_1(x) = B\sin(x)$, så $B = \pi/\sin x$. Vi finner alltså att

$$I_k(x) = \pi\frac{\sin kx}{\sin x}.$$

Om $x = m\pi$ för något $m \in \mathbb{Z}$ kommer den karakteristiska ekvationen att få dubbelrot $\mu = (-1)^m$. Alltså gäller det att $I_k(x) = (A + Bk)(-1)^{mk}$. Men $k = 0$ ger $0 = I_0(x) = A$, dvs $A = 0$ och $k = 1$ ger $\pi = (-1)^m B$, dvs $B = \pi/(-1)^m$. Alltså gäller det att $I_k(m\pi) = (-1)^{m(k-1)}\pi k$. Observera att detta stämmer överens med gränsvärdet av det uttryck vi fick förut, vilket vi enkelt finner med l'Hôpitals regel,

$$\lim_{x\to m\pi} \pi \frac{\sin kx}{\sin x} = \lim_{x\to m\pi} \pi k \frac{\cos(kx)}{\cos x} = \pi k \frac{\cos(km\pi)}{\cos(m\pi)} = (-1)^{m(k-1)}\pi k.$$

Vi kan alltså sammanfatta lösningen som att $I_k(x)$ blir den kontinuerliga utvidgningen av $x \mapsto \pi \sin(kx)/\sin x$ till $\mathbb{R}$.

6. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{2z^2-z}\,\mathrm{d}z$.

(b) Förklara varför integralen

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{Re} z}{z - 1/2}\,\mathrm{d}z$$

inte kan beräknas direkt med Cauchys integralformel med $f(z) = \operatorname{Re} z$. Beräkna sedan integralen.

Lösning

(a) Integranden är holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$, och den har enkelpoler i $z = 0$ och $z = \frac{1}{2}$. Residysatsen och residyregel 4 ger att

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{2z^2-z}\,\mathrm{d}z &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z^2+1}{2z^2-z} + \operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} \frac{z^2+1}{2z^2-z} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{z^2+1}{4z-1}\bigg|_{z=0} + \frac{z^2+1}{4z-1}\bigg|_{z=\frac{1}{2}} \right) \\
&= 2\pi i \left(-1 + \frac{5}{4} \right) = \frac{1}{2}\pi i.
\end{aligned}$$

(b) Vi kan inte använda Cauchys integralformel eftersom $f(z) = \operatorname{Re} z$ inte är en holomorf funktion. Men på enhetscirkeln $|z| = 1$ stämmer $\operatorname{Re} z$ överens med en holomorf funktion, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Tydligen blir integralen densamma som den vi just beräknat, och därmed lika med $\frac{1}{2}\pi i$.