LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2016–06–03 kl 14–19

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade om inget annat anges.

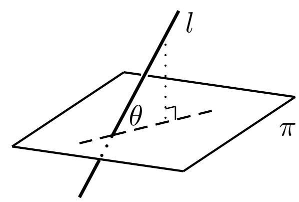
1. Bestäm, för varje värde på parametern a, antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + az = -4 \\ (a-2)x + 2y - 2z = a-2 \end{cases}.$$

Ange även lösningarna i de fall systemet har oändligt många lösningar.

2. a) Linjen l går genom punkterna $P_1 : (1, -2, 3)$ och $P_2 : (3, -3, 4)$, och planet π går genom punkterna $Q_1 : (1, -5, 0)$, $Q_2 : (3, -3, -2)$ och $Q_3 : (1, -4, -2)$. Bestäm skärningen mellan l och π. (0.6)

b) Bestäm skärningsvinkeln θ mellan l och π. (0.4)



3. a) Visa att $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, då A och B är inverterbara matriser. (0.2)

b) Definiera begreppet ortogonal matris. Ge exempel på tal a, b, c och λ så att

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ -2 & 2 & c \end{pmatrix}$$

blir ortogonal. (0.4)

c) Låt A vara matrisen i uppgift b) (med insatta värden på a, b, c och λ). Lös matrisekvationen

$$A^{-1}X^{-1} = B^{-1}, \qquad \text{där} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (0.4)$$

(Även om ditt svar i b) skulle vara felaktigt, så kan du få full poäng på denna deluppgift.)

4. Låt l vara linjen $x + 2y = 0$, och låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som svarar mot spegling av planets punkter i l.

a) Bestäm avbildningsmatrisen för F. (0.3)

b) Konstruera en ortonormerad bas $\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2$ sådan att $\widehat{\mathbf{e}}_1$ är parallell med linjen l. Låt $\mathbf{u} = (4, -3)$. Vilka blir koordinaterna för vektorn $\mathbf{u}$ med avseende på den nya basen $\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2$? (0.4)

c) Vad blir avbildningsmatrisen för F med avseende på basen $\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2$? (0.3)

VAR GOD VÄND!

5. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avbildar vektorn $(1, -1, 0)$ på vektorn $(1, 2, 0)$, vektorn $(0, 1, 1)$ på vektorn $(1, 1, 1)$, samt vektorn $(0, 1, -1)$ på nollvektorn. Bestäm avbildningsmatrisen för F. Bestäm även rangen av avbildningsmatrisen. Avgör slutligen om vektorn $(-1, 1, -3)$ ligger i värdemängden för F.

6. a) Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dvs. bestäm en inverterbar matris S och en diagonalmatris D sådana att $D = S^{-1}AS$. För full poäng ska matrisen S väljas ortogonal. (0.6)

b) Antag att matrisen A i a) är avbildningsmatris för en linjär avbildning. Hur kan denna avbildning tolkas geometriskt? (0.4)

LYCKA TILL!