LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2017-03-13 kl 14–19

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade om inget annat anges.

1. Bestäm för varje reellt tal a antalet lösningar till följande ekvationssystem. Ange dessutom samtliga lösningar då det finns oändligt många lösningar.

$$\begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ 2x + 3y + az = 4 \\ ax + y + 2z = -2a \end{cases}.$$

2. a) Bestäm en vektor $\mathbf{v}$ (skild från nollvektorn) som är ortogonal mot både $(1, 1, 2)$ och $(-3, 4, 1)$. Bestäm sedan en ekvation för linjen l som går genom punkten $P_0 : (0, 1, 2)$ och har riktning $\mathbf{v}$. (0.3)

b) Bestäm den punkt Q på linjen l i **a)** sådan att avståndet mellan punkterna $P : (2, 3, 3)$ och Q blir så litet som möjligt. (0.3)

c) Bestäm den punkt Q i planet $x + 2y + z + 1 = 0$ sådan att avståndet mellan punkterna $P : (2, 3, 3)$ och Q blir så litet som möjligt. (0.4)

3. a) Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildning som innebär att planets vektorer först speglas i y-axeln, och därefter vrids vinkeln $\pi/3$ radianer i positiv led kring origo. (0.6)

b) Skriv upp en matris av typen 4×3 som har rang 2. (Glöm inte att kort redogöra för hur du tänkt.) Beräkna sedan en bas för nollrummet för denna matris. (0.4)

4. På denna uppgift skall endast svar ges. Ange vilka av påståendena nedan som är sanna respektive falska. Varje rätt svar ger 0.2 poäng, varje fel svar ger -0.2 poäng och varje uteblivet svar ger 0.0 poäng. (Du kan dock inte få negativ poäng totalt på uppgiften)

a) För alla kvadratiska matriser A gäller det att $\det(2A) = 2 \det A$.

b) För alla kvadratiska matriser A gäller det att $\det A^T = \det A$.

c) Om det för 3×3-matrisen A gäller att A är inverterbar så är $\operatorname{rang} A = 3$.

d) Antag att A är avbildningsmatrisen för spegling av rummets vektorer i ett givet plan genom origo. Då är $\det A = 1$.

e) Låt A vara en kvadratisk matris. Om det homogena ekvationssystemet $AX = 0$ har entydig lösning så har $AX = Y$ entydig lösning för alla Y.

Var god vänd!

5. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A. (0.4)

b) Diagonalisera A, dvs. ange en matris S och en diagonalmatris D sådana att $D = S^{-1}AS$. (0.4)

c) Går det att hitta en ortogonal matris S sådan att $S^{-1}AS$ är en diagonalmatris? (0.2)

6. a) Vad menas med att vektorn $\mathbf{v}$ är en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$? (0.2)

b) Vad menas med att vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ (inte nödvändigtvis i $\mathbb{R}^p$) är linjärt beroende? Skriv också upp ett ekvivalent villkor till detta. (0.2)

c) Antag att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$, alla skilda från nollvektorn, och att $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en linjär avbildning sådan att $F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2$, $F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_3$ och $F(\mathbf{u}_3) = \mathbf{0}$. Visa att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är linjärt oberoende. (0.6)

LYCKA TILL!