LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2017-08-24 kl 14–19

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormala och positivt orienterade om inget annat anges.

1. Låt $\bar{\mathbf{u}} = (1, 1, 0)$, $\bar{\mathbf{v}} = (1, 2, 2)$ och $\bar{\mathbf{w}} = (1, -1, -2)$. Beräkna $|\bar{\mathbf{u}}|$,$|\bar{\mathbf{v}}|$, $\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}}$ samt vinkeln mellan vektorerna $\bar{\mathbf{u}}$ och $\bar{\mathbf{v}}$. Bestäm även arean av parallellogrammet som har sidorna $\bar{\mathbf{v}}$ och $\bar{\mathbf{w}}$.

2. a) Bestäm skärningen mellan de två planen $\pi_1 : x - 2y + 2z - 2 = 0$ och $\pi_2 : 2x - 4y + z - 1 = 0$. (0.5)

b) Låt $\pi_3 : x - 2y - 4z - 3 = 0$. Avgör om de tre planen π_1,π_2 och π_3 innehåller någon gemensam punkt samt om deras normaler är linjärt beroende eller inte. (0.5)

3. Låt F vara en linjär avbildning som avbildar vektorerna $\bar{\mathbf{u}}_1 = (1, 1)$ och $\bar{\mathbf{u}}_2 = (0, 1)$ på $F(\bar{\mathbf{u}}_1) = (-1, 2)$ respektive $F(\bar{\mathbf{u}}_2) = (-2, 4)$. Bestäm avbildningsmatrisen A till F och beräkna dess egenvärden och egenvektorer. Går det att hitta en matris S så att $D = S^{-1}AS$ blir diagonal? Bestäm i så fall både S och D.

4. a) Låt A och B vara matriser av storlek $m \times n$ respektive $p \times r$. Vilken storlek ska matrisen X ha för att matrismultiplikationen AXB ska vara definierad och vilken storlek får i så fall matrisen $C = AXB$? (0.2)

b) Bestäm talen b_1, b_2, b_3 så att matrisen

$$B = b_1 \begin{pmatrix} 2 & -2 & b_2 \\ 2 & 1 & b_3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

blir ortogonal och dessutom får positiv determinant. Lös även matrisekvationen $C = AXB$, där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(0.8)

V.G.V

5. Låt

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Avgör för vilka a som matrisen A är inverterbar. Hur många lösningar har matrisekvationen $AX = Y$ för ett sådant a? (0.3)

b) Bestäm rang, nolldimension samt en bas för nollrummet till matrisen A för alla a där matrisen inte är inverterbar. (0.3)

c) För ett visst värde på a finns ett högerled Y sådant att både

$$X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad X_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

är lösningar till systemet $AX = Y$. Bestäm samtliga lösningar till systemet för detta värde på a. (0.2)

d) Visa att om X_1 och X_2 är två lösningar till matrisekvationen $BX = Y$, där $n \times n$ matrisen B har rang $n - 1$, så kan samtliga lösningar skrivas

$$X = X_1 + t(X_2 - X_1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(0.2)

6. a) Bestäm en ortonormerad bas $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ sådan att $\hat{\mathbf{e}}_1$ är vinkelrät mot planet $\pi : x - y + z = 0$ och både $\hat{\mathbf{e}}_2$ och $\hat{\mathbf{e}}_3$ ligger i planet π. (0.3)

b) En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avbildar en vektor $\bar{\mathbf{u}}$ som är vinkelrät mot planet $\pi : x - y + z = 0$ på $F(\bar{\mathbf{u}}) = -3\bar{\mathbf{u}}$. Dessutom finns två linjärt oberoende vektorer $\bar{\mathbf{v}}_1$ och $\bar{\mathbf{v}}_2$ i planet π som avbildas på $F(\bar{\mathbf{v}}_1) = 2\bar{\mathbf{v}}_1$ och $F(\bar{\mathbf{v}}_2) = 2\bar{\mathbf{v}}_2$. Bestäm avbildningsmatrisen $\hat{A}$ till F i koordinatsystemet $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$. (0.3)

c) Låt E vara en parallellepiped med kanterna $\bar{\mathbf{u}}_1 = (1, 0, 1)$, $\bar{\mathbf{u}}_2 = (1, 2, 0)$ och $\bar{\mathbf{u}}_3 = (2, 3, 0)$ i det ursprungliga koordinatsystemet $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$. Avbildningen F (samma som ovan) avbildar E på en ny parallellepiped $F(E)$. Vilken volym får $F(E)$? (0.4)

LYCKA TILL!