LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2019-03-18 kl 14-19

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade om inget annat anges. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Beräkna skärningspunkten mellan planet $\pi\colon (x, y, z) = (1 + s, 1 - 2s + 2t, -1 - t)$ och linjen genom punkterna $(4, 0, 1)$ och $(0, -4, 1)$. Beräkna även vinkeln mellan linjen och planets normal.

2. Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ange även avbildningsmatrisen för sammansättningen $F \circ F$ där $F(x) = Ax$.

3. Bestäm rang, nolldimension och en bas till nollrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ange också, ifall det är möjligt,

a) tre linjärt oberoende kolonner i A, b) fyra linjärt oberoende kolonner i A.

4. Bestäm alla reella a sådana att vektorerna

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ a \end{bmatrix}$$

är linjärt beroende. Välj sedan det minsta av dessa a och bestäm, för detta a, värdemängden av den linjära avbildning som har avbildningsmatrisen $A = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}$.

5. Bestäm en positivt orienterad ortonormerad bas i $\mathbb{R}^2$ sådan att en basvektor är parallell med linjen $3x + 4y = 0$. Bestäm sedan en ekvation i den nya basen för den gamla x-axeln.

6. Låt $\mathbf{u} = (2, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$ och $\mathbf{w} = (1, -2, 2)$ samt låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som uppfyller

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \quad F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}, \quad F(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}.$$

Bestäm avbildningsmatrisen och diagonalisera den.

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Bevisa följande påståenden (du får lov att använda satser från läroboken utan bevis):

a) Produkt av två ortogonala matriser är igen en ortogonal matris.

b) För kvadratiska matriser A och B gäller det att $\det(AB) = \det(BA)$.

c) Vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ är linjärt beroende för alla $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^3$.

8. En kvadrat med sidlängden 1 har ett hörn i origo, ett hörn i $(1, 0, 1)$ och ligger i ett plan som är parallellt med vektorn $(1, 2, 2)$. Bestäm koordinaterna för de övriga två hörnen.

9. Låt A vara en 3×3 matris. Bestäm alla implikationer mellan följande påståenden (ange bevis eller motexempel):

a) A uppfyller ekvationen $A^2 = A$,

b) Egenvärdena till A kan endast vara 0 eller 1,

c) Avbildningen $F(x) = Ax$ är en ortogonal projektion på en linje eller ett plan.

10. Låt A vara en $m \times n$ matris. Visa att

$$\operatorname{rang} A \geq \frac{m+n}{2} \qquad \Rightarrow \qquad A \text{ är inverterbar.}$$

LYCKA TILL!