TEKNISKA HÖGSKOLAN I LUND
MATEMATISKA INSTITUTIONEN

LÖSNINGAR
LINJÄR ALGEBRA
2016-03-14

1. Vi börjar med att undersöka när determinanten för koefficientmatrisen är noll:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -a \\ 2a & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 2.$$

För $a \neq \pm 2$ har systemet entydig lösning, och eftersom systemet är homogent är denna $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Om $a = \pm 2$ så finns oändligt många lösningar. För $a = 2$ fås:

$$\begin{cases} 4x \quad\;\; - 2z = 0 \\ 4x + y \qquad = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 4x + y \qquad = 0 \\ 8x + 2y \qquad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -4t \\ z = 2t \end{cases}.$$

För $a = -2$ fås:

$$\begin{cases} 4x \quad\;\; + 2z = 0 \\ -4x + y \qquad = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -4x + y \qquad = 0 \\ 8x - 2y \qquad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 4t \\ z = -2t \end{cases}.$$

Svar: Fallet $a = 2$ ger $(x, y, z) = t(1, -4, 2),\ t \in \mathbb{R}$, och $a = -2$ ger $(x, y, z) = t(1, 4, -2),\ t \in \mathbb{R}$. Då $a \neq \pm 2$ blir lösningen $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

2. **a)** Vi beräknar $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -1, -2)$ och $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 2, -4)$. En normalvektor till planet ges av

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (1, -1, -2) \times (-2, 2, -4) = (8, 8, 0) = 8(1, 1, 0).$$

Vi väljer $(1, 1, 0)$ som normalvektor, vilket ger ekvationen $x + y + d = 0$ för π. Talet d bestäms genom att stoppa in en av punkterna i ekvationen, t.ex. P_1:

$$1 + 0 + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = -1.$$

Vi får alltså $\pi : x + y - 1 = 0$.

b) Vi löser systemet

$$\begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ \;\; x + y \qquad - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t - 1 \end{cases}.$$

En ekvation för linjen blir alltså $(x, y, z) = (0, 1, -1) + t(1, -1, 1),\ t \in \mathbb{R}$.

c) Vi väljer punkten $P_0 : (0, 1, -1)$ på linjen och beräknar $\overrightarrow{P_0P_1} = (1, -1, 4)$. Därefter projicerar vi $\overrightarrow{P_0P_1}$ på linjens riktningsvektor $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{n} = \frac{(1, -1, 4) \cdot (1, -1, 1)}{|(1, -1, 1)|^2}\,(1, -1, 1) = \frac{6}{3}\,(1, -1, 1) = 2(1, -1, 1).$$

Med en uppdelning $\overrightarrow{P_0P_1} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ blir nu $|\mathbf{u}_2|$ det vinkelräta avståndet från P_1 till linjen. Eftersom $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{P_0P_1} - \mathbf{u}_1 = (1,-1,4) - (2,-2,2) = (-1,1,2)$ blir avståndet vi söker $|(-1,1,2)| = \sqrt{6}$.

Svar: a) $\pi : x + y - 1 = 0$. b) $l : (x,y,z) = (0,1,-1) + t(1,-1,1),\ t \in \mathbb{R}$. c) $\sqrt{6}$.

3. **a)** Se läroboken sidan 129.

   b) Se läroboken sidan 130–131.

   c) Vi börjar med att lösa ut X:

$$AX + 3X = B \quad \Leftrightarrow \quad (A+3I)X = B \quad \Leftrightarrow \quad X = (A+3I)^{-1}B,$$

under förutsättning att $A + 3I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ är inverterbar. Inversen av $A + 3I$ beräknas till

$$(A+3I)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

så vi får

$$X = (A+3I)^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Svar: c) $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

4. **a)** Att 2 är ekvivalent med 3 följer direkt av Huvudsatsen (eller Sats 10 på sidan 214.) Om $AX = Y$ saknar lösning så måste det $A = 0$, men omvänt om det $A = 0$ så kan $AX = Y$ ha oändligt många lösningar; här gäller det alltså endast att 4 implicerar 1. Inga andra implikationer finns.

   b) Vi väljer $\mathbf{e}'_1$ vilkelrät mot $(-2,1)$, exempelvis $\mathbf{e}'_1 = (1,2)$ (beräknat i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ blir ju $(1,2)\cdot(-2,1) = 0$). Enligt det givna koordinatsambandet skall det gälla att

$$3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2,$$

eller med $\mathbf{e}'_2 = (x,y)$,

$$(3,-1) = (1,2) + (x,y) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (2,-3).$$

Detta blir alltså $\mathbf{e}'_2$ för vårt val av $\mathbf{e}'_1$.

Svar: a) 2 $\Leftrightarrow$ 3, 4 $\Rightarrow$ 1. b) Exempelvis $\mathbf{e}'_1 = (1,2)$ och $\mathbf{e}'_2 = (2,-3)$.

5. **a)** Låt A vara avbildningsmatrisen för F. Då gäller det att

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Med tanke på hur matrismultiplikation fungerar så kan vi nu skriva

$$A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Inversen beräknas till
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$
och vi får slutligen
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Enligt definitionen av linjäritet skall det exempelvis gälla att $G(2\mathbf{u}) = 2G(\mathbf{u})$ för varje vektor $\mathbf{u}$. Men i vårt fall, med $\mathbf{u} = (1,2)$, får vi
$$G(2(1,2)) = G((2,4)) = (5,6), \qquad 2G((1,2)) = 2(3,4) = (6,8).$$
Vi ser alltså att G ej kan vara linjär.

c) Eftersom rangen är dimensionen av värdemängden, i vårt fall ett plan, blir $\operatorname{rang} A = 2$. En projektion är inte bijektiv, så A kan inte vara inverterbar. Då vet vi också att $\det A = 0$.

Svar: a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. b) Nej. c) $\operatorname{rang} A = 2$, $\det A = 0$, ej inverterbar.

6. **a)** Se läroboken sidan 238.

b) Eftersom kolonnerna i S är egenvektorer kopplade till egenvärdena som står som diagonalelement i motsvarande kolonn i D gäller det att
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = e\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} d \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} d \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
vilket uträknat blir systemen
$$\begin{cases} 3 + c = 4 \\ 1 + 3c = 4c \\ 2 + ac = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4 = e \\ -4 = -e \\ 2 - a + b = e \end{cases}, \quad \begin{cases} 3d + 5 = df \\ d - 1 = f \\ 2d + a + 2b = 2f \end{cases}.$$
I det första systemet ser vi direkt att $c = 1$, och löser sedan ut $a = -2$. I det andra ser vi $e = 4$ och löser ut $b = 0$. I det sista systemet är den andra och den tredje ekvationen ekvivalenta. Sätter vi in $f = d - 1$ i den första ekvationen får vi andragradsekvationen $d^2 - 4d - 5 = 0$, vilken har lösningarna $d = 5$ och $d = -1$. En kontroll (exempelvis med hjälp av determinanten) visar att S inte är inverterbar för $d = 5$ (då $c = 1$), men med $d = -1$ fungerar det. Detta ger slutligen $f = -2$.

Svar: $a = -2$, $b = 0$, $c = 1$, $d = -1$, $e = 4$ och $f = -2$.