LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR TILL
Linjär algebra
2017 – 01 – 09, kl. 14 – 19

1. Skärningspunkten (x, y, z) mellan linjerna uppfyller

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - \ t \\ z = 1 + \ t \\ x = 6 + \ s \\ y = 1 + \ s \\ z = 1 - 2s. \end{cases}$$

Så gäller

$$\begin{cases} 1 + 2t = 6 + \ s \\ 2 - t = 1 + \ s \\ 1 + t = 1 - 2s, \end{cases}$$

som ger $t = 2$ och $s = -1$. Så är $(x, y, z) = (5, 0, 3)$.
Vektorerna $(2, -1, 1)$ och $(1, 1, -2)$ är riktningsvektorer av linjerna. Så för vinkeln θ mellan linjerna gäller

$$(2, -1, 1) \cdot (1, 1, -2) = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}\ \cos\theta,$$

som ger $\cos\theta = -1/6$ och alltså $\theta = \arccos(-1/6)$.

2.a) Vi har vektorerna $\overrightarrow{P_1P_2} = (1 - 1, 0 - 1, 1 - 0) = (0, -1, 1)$ och $\overrightarrow{P_1P_3} = (2 - 1, 1 - 1, 2 - 0) = (1, 0, 2)$. Så är

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2, 1, 1).$$

Arean av triangeln blir

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b)Ur lösningen i a) vet vi att planet har en normalvektor $\mathbf{n} = (-2, 1, 1)$ och alltså har ekvationen

$$-2(x - 1) + (y - 1) + (z - 0) = 0,$$

dvs

$$-2x + y + z + 1 = 0.$$

Avståndet från punkten $P: \ (3, 1, 0)$ till planet är

$$\frac{|-2 \cdot 3 + 1 + 0 + 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

3.a) Eftersom

$$\mathbf{F}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ 3x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Så är avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $det(A) = 5 \neq 0$ vet vi att A är inverterbar, som medför att $\mathbf{F}$ är bijektiv och alltså värdemängden av $\mathbf{F}$ är hela $\mathbb{R}^3$.

b) Vektorerna $(2, 1)$ och $(3, 1)$ bildar en bas i $\mathbb{R}^2$. Sätt $(-5, -1) = x_1(2, 1) + x_2(3, 1)$, som ger att $x_1 = 2$ och $x_2 = -3$. Så gäller

$$\mathbf{F}\left((-5, -1)\right) = \mathbf{F}\left(x_1(2, 1) + x_2(3, 1)\right) = x_1\mathbf{F}\left((2, 1)\right) + x_2\mathbf{F}\left((3, 1)\right)$$

$$= 2(1, 2) - 3(1, 1) = (-1, 1).$$

4.a) Med hjälp av Gausselimination kan man överföra matrisen A till trappformen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Två pivotelement medför att $rang(A) = 2$ och $nolldim(A) = 5 - 2 = 3$. Lösningarna till matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är

$$\mathbf{x} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

En bas till nollrummet av A är $(-1, 1, 0, 0, 0),\ (-2, 0, 3, 7, 0),\ (4, 0, 1, 0, -7)$.

b) $(X + C)^{-1}\, C = D^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad CD = I\,(X + C) \quad \Leftrightarrow \quad X = CD - C$, dvs

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.a) Avbildningsmatrisen till den sammansatta avbildningen $\mathbf{F}_2$ är

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}.$$

b) Avbildningsmatrisen till den sammansatta avbildningen $\mathbf{F}_{50}$ är A^{50}. Vi börjar med att diagonalisera matrisen A. Den karakteristiska ekvationen är

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0.$$

Egenvärdena är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 5$.
För $\lambda_1 = -1$ löser vi

$$\begin{cases} -2x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\ -4x_1 & - & 4x_2 & = & 0 \end{cases},$$

som ger

$$\begin{cases} x_1 & = & -t \\ x_2 & = & t. \end{cases}$$

Vektorn $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor med egenvärdet $\lambda_1 = -1$.
För $\lambda_2 = 5$ löser vi

$$\begin{cases} 4x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\ -4x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \end{cases},$$

som har lösningar

$$\begin{cases} x_1 & = & t \\ x_2 & = & 2t \end{cases}.$$

Vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ är en egenvektor med egenvärdet $\lambda_2 = 5$.
Sätt

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Så gäller $S^{-1}AS = D$ och $S^{-1}A^{50}S = D^{50}$. Så är

$$A^{50} = SD^{50}S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{50} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{50} & 0 \\ 0 & 5^{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + 5^{50} & -1 + 5^{50} \\ -2 + 2 \cdot 5^{50} & 1 + 2 \cdot 5^{50} \end{pmatrix}.$$

6. a) Vi har

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 = (2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) + (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \\ \hat{\mathbf{v}} = -2\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 = -2\,(2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) + (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -5\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

som medför

$$\hat{\mathbf{u}} \bullet \hat{\mathbf{v}} = 1 \cdot (-5) + 4 \cdot (-5) = -25.$$

b) Låt $P' : (x', y', z')$ vara den ortogonala projektionen av punkten $P : (x, y, z)$ på planet $-x + 2y - z = 0$, som har en normalvektor $\mathbf{n} = (1, -2, 1)$.
Ur projektionsformeln har vi

$$(x', y', z') = \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\,\mathbf{n} = (x, y, z) - \frac{x - 2y + z}{6}\,(1, -2, 1)$$

$$= \left(\frac{5x + 2y - z}{6}, \ \frac{x + y + z}{3}, \ \frac{-x + 2y + 5z}{6} \right),$$

som ger att bilderna av de fyra hörnen är $P_0' : (0, 0, 0), \ P_1' : (1, 1, 1), \ P_2' : (0, 1, 2)$ och $P_3' : (1, 0, -1)$. De är hörn av fyrhörningen. Eftersom bara punkten P_3' ligger under $xy-$planet, måste sträckan $P_0'P_3'$ vara en kant till fyrhörningen. För att bedöma vilken av $P_0'P_1'$ coh $P_0'P_2'$ blir diagonal till fyrhörningen, studerar vi vektorprodukterna

$$\overrightarrow{OP_3'} \times \overrightarrow{OP_1'} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 1)$$

och

$$\overrightarrow{OP_1'} \times \overrightarrow{OP_2'} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -2, 1)$$

som har samma riktning, vilket medför att $P_0'P_1'$ är diagonal och arean av fyrhörningen är alltså lika med

$$\frac{1}{2} \left| \overrightarrow{OP_3'} \times \overrightarrow{OP_1'} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{OP_1'} \times \overrightarrow{OP_2'} \right| = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Alt. Man har likheten

$$\overrightarrow{OP_3'} \times \overrightarrow{OP_1'} = \overrightarrow{OP_3'} \times \overrightarrow{OP_2'},$$

därför att om vi antar att $\overrightarrow{OP_1'}$ är diagonal så gäller $\overrightarrow{OP_1'} = \overrightarrow{OP_2'} + \overrightarrow{OP_3'}$, vilket ger likheten. Vi får alltså den sökta arean

$$\left| \overrightarrow{OP_3'} \times \overrightarrow{OP_1'} \right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$