LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR TILL
LINJÄR ALGEBRA
2017-06-08 kl 8–13

1. a) Eftersom $\overline{OP}_2 - \overline{OP}_1 = (-6,-2,-4) = -2(3,1,2)$ blir $\bar{\mathbf{v}} = (3,1,2)$ en riktningsvektor till linjen. Eftersom P_1 är en punkt på linjen kan den skrivas

$$(x,y,z) = (3,5,4) + t(3,1,2).$$

Två riktningsvektorer till planet ges av

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_1 &= \overline{OP}_4 - \overline{OP}_3 = (-1,-2,-3) \\ \bar{\mathbf{v}}_2 &= \overline{OP}_5 - \overline{OP}_3 = (1,0,-1) \end{aligned}$$

Eftersom $\bar{\mathbf{v}}_1 \times \bar{\mathbf{v}}_2 = (2,-4,2)$ blir $\bar{\mathbf{n}} = (1,-2,1)$ normal till planet. Insättning av P_3 ger nu planets ekvation $x - 2y + z = 0$.
Stoppar vi in utrycket för linjen i planets ekvation får vi

$$(3+3t) - 2(5+t) + (4+2t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 1,$$

vilket ger skärningspunkten $(6,6,6)$.

b) Den sökta punkten får vi genom ortogonal projektion på linjen. Punkten $P_0 = (1,2,3)$ är en punkt på linjen. Vektorn $\bar{\mathbf{u}} = \overline{OP}_6 - \overline{OP}_0 = (2,5,-2)$ går mellan linjen och punkten P_6. Om $\bar{\mathbf{v}} = (3,2,1)$ är riktningsvektorn till linjen får vi projektionen

$$\frac{\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}}}{|\bar{\mathbf{v}}|^2}\bar{\mathbf{v}} + \overline{OP}_0 = \frac{14}{14}(3,2,1) + (1,2,3) = (4,4,4)$$

Avståndet mellan linjen l och punkten P_6 blir

$$|(3,7,1) - (4,4,4)| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}.$$

2. Systemet kan bara ha oändligt många lösningar om

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & a \\ -1 & -a & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & -a-2 & 0 \end{vmatrix} = (a+2)(a-2),$$

vilken ha lösningarna $a = \pm 2$.
För $a = 2$ får vi systemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 4 \\ -x & - & 2y & - & z & = & -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ & & y & & & = & 0 \\ & - & 4y & & & = & 0 \end{array} \right. ,$$

som har lösningarna $(x, y, z) = (2 - t, 0, t),\ t \in \mathbb{R}$.
För $a = -2$ får vi

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & = & -4 \\ -x & + & 2y & - & z & = & -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ & & y & - & 4z & = & -8 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

som har lösningarna $(x, y, z) = (-14 + 7t, -8 + 4t, t),\ t \in \mathbb{R}$.

3. Gausselimination ger

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrisen G har 2 pivåelement och därför har matrisen A rang 2. Noldimmensionen blir då $4-2=2$. Nollrummet är alla lösningar till

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & -2x_2 & - & 6x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcc} x_1 & = & 2t+2s \\ x_2 & = & -3t-3s \\ x_3 & = & s \\ x_4 & = & 2t \end{array} \right. .$$

En bas för nollrummet är alltså

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. a) Vi har att

$$AX^{-1}B = C \Leftrightarrow X^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow X = BC^{-1}A.$$

Eftersom $C^{-1} = C$ får vi

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) En avbildning är linjär om $F(a\bar{\mathbf{x}} + b\bar{\mathbf{y}}) = aF(\bar{\mathbf{x}}) + bF(\bar{\mathbf{y}})$.
F_1 är linjär eftersom

$$F_1(a\bar{\mathbf{x}}+b\bar{\mathbf{y}}) = -2\frac{\bar{\mathbf{v}} \cdot (a\bar{\mathbf{x}} + b\bar{\mathbf{y}})}{|\bar{\mathbf{v}}|^2}\bar{\mathbf{v}} = a\left(-2\frac{\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{x}}}{|\bar{\mathbf{v}}|^2}\bar{\mathbf{v}}\right)+b\left(-2\frac{\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{y}}}{|\bar{\mathbf{v}}|^2}\bar{\mathbf{v}}\right) = aF_1(\bar{\mathbf{x}})+bF_1(\bar{\mathbf{y}}).$$

F_2 är inte linjär eftersom

$$F_2(a\bar{\mathbf{x}}) = -2\frac{\bar{\mathbf{v}} \cdot (a\bar{\mathbf{x}})}{|\bar{\mathbf{v}}|^2}(a\bar{\mathbf{x}}) = a^2F_2(\bar{\mathbf{x}}) \neq aF_2(\bar{\mathbf{x}}).$$

F_3 kan inte vara linjär eftersom $(0, 0, 0)$ inte ligger på linjen, alltså är $F(\overline{0}) \neq \overline{0}$.
F_4 är linjär eftersom den kan representeras med en avbildningmatris.

5. a) Projektion av en godtycklig vektor $\bar{\mathbf{u}} = (x, y, z)$ på planets normal $\bar{\mathbf{n}} = (1, 2, -2)$ ges av

$$\bar{\mathbf{u}}' = \frac{\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{n}}|^2}\bar{\mathbf{n}} = \frac{x + 2y - z}{9}(1, 2, -2).$$

Projektionen på planet blir då

$$(x, y, z) - \frac{x + 2y - 2z}{9}(1, 2, -2) = \frac{1}{9}(8x - 2y + 2z, -2x + 5y + 4z, 2x + 4y + 5z),$$

vilket ger avbildningsmatrisen

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vektorer som ligger i planet avbildas på sig själva och blir därför egenvektorer med egenvärden 1. Vektorer som är parallella med normalen avbildas på nollvektorn och blir därför egenvektorer med egenvärden 0.

b) Projektionen av punkten (x_0, y_0, z_0) i riktningen $\bar{\mathbf{v}} = (1, 2, 3)$ av ges skärningen mellan linjen $l : (x_0, y_0, z_0) + t(1, 2, 3)$ och planet $\pi : x + 2y - 2z = 0$. Insättning av l i planets ekvation ger

$$(x_0 + t) + 2(y_0 + 2t) - 2(z_0 + 3t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = x_0 + 2y_0 - 2z_0.$$

Skärningen blir då

$$(2x_0 + 2y_0 - 2z_0, 2x_0 + 5y_0 - 4z_0, 3x_0 + 6y_0 - 5z_0)$$

vilket ger avbildningsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Vektorer som ligger i planet avbildas på sig själva och blir därför egenvektorer med egenvärden 1. Vektorer som är parallella med $(1, 2, 3)$ avbildas på nollvektorn och blir därför egenvektorer med egenvärden 0.

6. a) En vektor som är parallel med $(2, 1, -2)$ och har längden 1 är

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{3}(2, 1, -2).$$

Vektorn $\hat{\mathbf{e}}_2$ ska vara vinkelrät mot $(2, 1, -2)$ och planets normal $(2, -2, 1)$. En sådan vektor får vi med hjälp av kryssprodukten

$$(2, 1, -2) \times (2, -2, 1) = (-3, -6, -6) = -3(1, 2, 2).$$

Vi kan därför välja

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{3}(1, 2, 2).$$

Vi får nu

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{3}(2, -2, 1).$$

b) Vi får koordinatsambandet $X = S\hat{X}$, där basbytesmatrisen

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Eftersom $Y = AX \Leftrightarrow S\hat{Y} = AS\hat{X} \Leftrightarrow \hat{Y} = S^T AS\hat{X}$ blir den nya avbildningsmatrisen

$$\hat{A} = S^T AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Egenvärden till $\hat{A}$ får vi genom $\det(\lambda I - \hat{A}) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$, vilken har lösningarna $\lambda = \pm 1$. Egenvektorer till $\lambda = 1$ ges nu av systemet

$$\begin{cases} -x_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases},$$

vilket ger egenvektorerna $(t, 0, 0)$, $t \neq 0$. P.s.s. får vi egenvektorerna till $\lambda = -1$ från systemet

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

som har lösningarna $(0, 0, t)$, $t \neq 0$. Vi ser nu att vi bara kan hitta två linjärt oberoende egenvektorer till $\hat{A}$ som därför inte kan diagonaliseras. Vi vet dessutom att för en egenvektor X till A med egenvärde γ gäller

$$AX = \gamma X \Leftrightarrow S\hat{A}S^T X = \gamma X \Leftrightarrow \hat{A}S^T X = \gamma S^T X.$$

Dvs. om X är egenvektor till A så är $S^T X$ egenvektor till $\hat{A}$. Det kan alltså bara finnas två linjärt oberoende egenvektorer till A som därför ej är diagonaliserbar.

c) Låt $\hat{X}_n = \hat{A}^n \hat{X}_0$ där

$$\hat{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Vi får då att $\hat{X}_n = \hat{A}\hat{X}_{n-1}$ vilket vi kan skriva som ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_n & = & x_{n-1} & + & y_{n-1} & & \\ y_n & = & & & y_{n-1} & & \\ z_n & = & & & & - & z_{n-1} \end{array} \right. .$$

dom två sista ekvationerna ger att

$$y_n = y_{n-1} = y_{n-2} = ... = y_0$$

och

$$z_n = -z_{n-1} = z_{n-2} = ... = (-1)^n z_0.$$

För x-koordinaten får vi nu

$$x_n = x_{n-1} + y_0 = x_{n-2} + 2y_0 = x_{n-3} + 3y_0 = ... = x_0 + ny_0.$$

I matrisform blir detta

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}}_{=\hat{A}^n} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $A = S\hat{A}S^T$ får vi

$$A^n = S\hat{A}S^T S\hat{A}S^T S\hat{A}S^T ... S\hat{A}S^T = S\hat{A}^n S^T,$$

vilket ger

$$A^n X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Efter lite matrismultiplikationer får man slutligen

$$A^n X = \begin{pmatrix} 2n + 1 + 2(-1)^n \\ n + 2 - 2(-1)^n \\ -2n + 2 + (-1)^n \end{pmatrix}.$$