LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR TILL
LINJÄR ALGEBRA
2017-08-24 kl 14–19

1. Vi får$|\bar{\mathbf{u}}| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$, $|\bar{\mathbf{v}}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$ och $\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = 1\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 2 = 3$. Om ϕ är vinkeln mellan $\bar{\mathbf{u}}$ och $\bar{\mathbf{v}}$ får vi från definitionen av skalärprodukt att

$$\cos(\phi) = \frac{\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}}}{|\bar{\mathbf{u}}||\bar{\mathbf{v}}|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

vilket ger $\phi = \frac{\pi}{4}$.
Eftersom $\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{w}} = (-2, 4, -3)$ blir arean av parallellogramet $|(-2,4,-3)| = \sqrt{(-2)^2+4^2+(-3)^2} = \sqrt{29}$.

2. a) Skärningslinjen ges av ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & - & 4y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 2z & = & 2 \\ & & & & -3z & = & -3 \end{array}\right.,$$

vilket har lösningarna $(x, y, z) = (2t, t, 1)$.

b) Om vi stoppar in skärningslinjen i ekvationen för π_3 får vi

$$2t - 2t - 4 - 3 = 0,$$

vilken inte har någon lösning. Alltså finns ingen gemensam punkt till de 3 planen.
Detta betyder att systemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & - & 4y & + & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 3 \end{array}\right.$$

saknar lösning vilket i sin tur betyder att radvektorerna i matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

dvs (normalerna) är linjärt beroende.

3. Vi får matrisekvationen

$$A\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=B} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{=C} \Leftrightarrow A = CB^{-1},$$

vilket ger

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Egenvädena till A får vi genom

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 5) = 0,$$

vilken har lösningarna $\lambda = 0$ och $\lambda = 5$.
Egenvektorer till $\lambda = 0$ ges av systemet

$$\begin{cases} -x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & = & 0 \end{cases},$$

som har lösningarna $t(2, 1)$, $t \neq 0$. Egenvektorer till $\lambda = 5$ ges av systemet

$$\begin{cases} 4x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 1x_2 & = & 0 \end{cases},$$

som har lösningarna $t(-1, 2)$, $t \neq 0$.
Eftersom det finns 2 linjärt oberoende egenvektorer och matrisen A har storlek 2×2 kan den diagonaliseras. Vi kan tex välja

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

vilket ger

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. a) Matrisen X måste ha storleken $n \times p$ och C blir då $m \times r$.

b) För att den tredje kolonnen i B ska bli vinkelrät mot de två första måste b_2 och b_3 uppfylla ekvationerna

$$\begin{cases} 2b_2 + 2b_3 - 2 = 0 \\ -2b_2 + b_3 - 4 = 0 \end{cases},$$

vilka har lösningen $(b_2, b_3) = (-1, 2)$. För att kolonnerna i B ska få längden 1 måste $b_1 = \pm\frac{1}{3}$. Eftersom

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -27$$

får vi $\det(B) = 1$ om vi väljer $b_1 = -\frac{1}{3}$.
Eftersom B är ortogonal är $B^{-1} = B^T$. Vi får då att

$$X = A^{-1}CB^T = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vilket ger

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. a) Matrisen A är inverterbar om $\det(A) = -4a^2 + 12a - 8 = -4(a-1)(a-2) \neq 0$. Vilket ger att $a \neq 1$ och $a \neq 2$. När A är inverterbar har ekvationen $AX = Y$ den entydiga lösningen $X = A^{-1}Y$.

b) För $a = 1$ ger gausselimination att $AX = 0 \Leftrightarrow GX = 0$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom G har 2 pivåelement har A rang 2. Noldimensionen blir då $3 - 2 = 1$. Nollrummet är alla lösningar till $GX = 0$ vilka blir $t(-2, 1, 0)$. Alltså är $(-2, 1, 0)$ en bas för nollrummet.
För $a = 2$ får vi att $AX = 0 \Leftrightarrow GX = 0$ där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom G har 2 pivåelement har A rang 2 och nolldimension 1. En bas till nollrummet blir $(1, 0, 1)$.

c) Eftersom systemet har två lösningar måste antingen $a = 1$ eller $a = 2$. Skillnaden mellan lösningarna $(-3, 2, 1) - (-5, 2, -1) = (2, 0, 2)$ ska finnas i nollrummet vilket ger att $a = 2$. Eftersom skillnaden mellan 2 lösningar alltid finns i nollrummet, som här spänns upp av $(1, 0, 1)$, kan samtliga lösningar skrivas exempelvis

$$(-3, 2, 1) + t(1, 0, 1).$$

d) Eftersom B har n kolonner och rang $n - 1$ har B nolldimensionen 1. Vektorn $X_2 - X_1$ ligger i nollrummet eftersom

$$B(X_2 - X_1) = BX_2 - BX_1 = Y - Y = 0,$$

och blir en bas för nollrummet eftersom nolldimensionen är 1. Eftersom skillnaden mellan 2 lösningar ligger i nollrummet kan alla lösningar skrivas

$$X_1 + t(X_2 - X_1).$$

6. a) En normal till π är $\bar{\mathbf{n}} = (1, -1, 1)$. Vi kan därför välja $\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$. En vektor i planet med längd 1 är t.ex. $\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$. En tredje basvektor får vi nu genom

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2).$$

b) Eftersom $\hat{\mathbf{e}}_1$ är normal till planet är $F(\hat{\mathbf{e}}_1) = -3\hat{\mathbf{e}}_1$. De två vektorerna $\bar{\mathbf{v}}_1$ och $\bar{\mathbf{v}}_2$ är linjärt oberoende och därför kan varje vektor i planet skrivas $\bar{\mathbf{v}} = a\bar{\mathbf{v}}_1 + b\bar{\mathbf{v}}_2$. Eftersom F är linjär ser vi nu att

$$F(\bar{\mathbf{v}}) = F(a\bar{\mathbf{v}}_1 + b\bar{\mathbf{v}}_2) = aF(\bar{\mathbf{v}}_1) + bF(\bar{\mathbf{v}}_2) = (a2\bar{\mathbf{v}}_1 + b2\bar{\mathbf{v}}_2) = 2\bar{\mathbf{v}},$$

för alla vektorer i planet. Eftersom $\hat{\mathbf{e}}_2$ och $\hat{\mathbf{e}}_3$ båda ligger i planet blir $F(\hat{\mathbf{e}}_2) = 2\hat{\mathbf{e}}_2$ och $F(\hat{\mathbf{e}}_3) = 2\hat{\mathbf{e}}_3$.
I basen $\hat{\mathbf{e}}_1$,$\hat{\mathbf{e}}_2$,$\hat{\mathbf{e}}_3$ avbildas alltså $(1, 0, 0)$,$(0, 1, 0)$,$(0, 0, 1)$ på $(-3, 0, 0)$,$(0, 2, 0)$,$(0, 0, 2)$, vilket ger avbildningsmatrisen

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Vi har

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

vilket ger att E har volymen 1. Om A är avbildningsmatrisen i det ursprungliga korrdinatsystemet $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ och S är basbytesmatrisen så är

$$\hat{A} = S^T AS \Leftrightarrow A = S\hat{A}S^T,$$

eftersom basbytet är ortogonalt. Vi får då att

$$\det(A) = \det(S^T)\det(\hat{A})\det(S) = \det(\hat{A}) = -3 \cdot 2 \cdot 2 = -12.$$

Volymen av $F(E)$ blir alltså $|-12| \cdot 1 = 12$.