

Hjälpmedel: Räknedosa. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Alla svar skall förenklas så långt som möjligt, kan innehålla binomialkoefficienter eller Stirlingtal, men undvik summatecken Σ i svaret.

1. Låt x, y vara heltal sådana att $23|3x + 5y$. Visa att $23|5x - 7y$.
2. Man väljer 20 bollar från en låda med 40 vita och 40 röda bollar. Bestäm sannolikheten
 - a) att alla bollar har samma färg.
 - b) att antalet vita bollar är större än antalet röda bollar.
3. Betrakta ekvationen $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 2014$. Hur många heltalslösningar har den om
 - a) $x_i \geq 0$? (0.2)
 - b) $x_i \geq 400$? (0.4)
 - c) $x_i \leq 505$? (0.4)
4. Låt V vara mängden av alla k -siffriga tal med siffrorna 1, 2 eller 3. Betrakta V som mängden av hörn i en graf $G = (V, E)$. Det finns en kant mellan v_1, v_2 om och endast om talen v_1 och v_2 skiljer sig från varandra precis i en siffra.
 - a) Rita grafen för $k = 2$ och en Hamiltoncykel i den. (0.3)
 - b) För vilka k har grafen en Eulercykel? (0.2)
 - c) För vilka k har grafen en Hamiltonväg? (0.5)
5. a) Vad menas med $a \equiv b \pmod{n}$? Visa att det är en ekvivalensrelation på \mathbf{Z} . (0.6)
b) Visa att i en ring är den additiva inversen $-a$ entydigt bestämd. (0.4)
6. I korrespondensen mellan 17 matematiker förekommer tre olika språk. Varje par av matematiker använder bara ett språk mellan sig. Visa att det finns tre som använder samma språk mellan sig.

LYCKA TILL!