LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
DISKRET MATEMATIK
SVAR OCH ANVISNINGAR
2015-08-22

1. **a)** Visa att relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

b) Bland de tolv representanterna i uppgiften finns de inbördes ekvivalenserna $(1,1)\mathcal{R}(2,2)\mathcal{R}(3,3)$ samt $(2,1)\mathcal{R}(4,2)$. Representanterna fördelar sig därför på nio klasser.

2. Antalet chokladbitar till Anders/Björn/Daniel beskrivs av exponenterna i $A(x) = B(x) = D(x) = x^4 + x^5 + x^6 + \cdots = \frac{x^4}{1-x}$. För Cecilia och Erik blir funktionerna $C(x) = x^4 + x^6 + x^8 + \cdots = \frac{x^4}{1-x^2}$ respektive $E(x) = x^5 + x^7 + x^9 + \cdots = \frac{x^5}{1-x^2}$. Detta ger oss den genererande funktionen $F(x) = A(x)B(x)C(x)D(x)E(x) = \frac{x^{21}}{(1-x)^3(1-x^2)^2} = \frac{x^{21}}{(1-x)^5(1+x)^2}$.

3. Totala antalet möjliga rader är $\binom{35}{7} = 6724520$. Antalet rader som ger exakt k rätt är $\binom{7}{k}\binom{28}{7-k}$. (Antal sätt att välja vilka k tal från den rätta raden som skall vara med multiplicerat med antal sätt att välja de övriga $7-k$ talen.) Detta ger

$$\binom{7}{7}\binom{28}{0}+\binom{7}{6}\binom{28}{1}+\binom{7}{5}\binom{28}{2}+\binom{7}{4}\binom{28}{3} = 1+196+7938+114660 = 122795$$

rader med minst fyra rätt och sannolikheten för vinst blir då $122795/6724520 \approx 1.83\%$.

4. **a)** Se läroboken, *Diskret Matematik* av *Lars-Christer Böiers*, sidan 162.

b) Skriv $k = 10 \cdot r + s$ där s är entalssiffran i k. Då $8^k = 8^{10r+s} = (8^{10})^r 8^s \equiv 8^s$

5. Använd principen om inklusion och exklusion. Med beteckningar som i boken och A_1 = arrangemang som innehåller SOM, A_2 = arrangemang som innehåller ROS och A_3 = arrangemang som innehåller LAMM får vi

$$C = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 = \frac{9!}{2!2!} - (7! + \frac{7!}{2!} + \frac{6!}{2!}) + (5! + 0 + 4!) - 0 = 90720 - 7920 + 144 - 0 = 82944.$$

6. **a)** Den kortaste cykeln är av längd fem.

b) Att grafen inte är planär kan visas med Kuratowskis sats eller med att om grafen vore planär så skulle den uppfylla olikheten i följdsats 1 på sid 278 i läroboken.

c) Grafen har ingen hamiltoncykel enligt följande resonemang: Antag att vi har en hamiltoncykel och numrera noderna $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_9, V_{10}$ efter deras plats i cykeln. (Rita figur!) Vi skall sedan placera ut de återstående fem bågarna utan att skapa någon cykel av längd tre eller fyra. Dessutom skall varje nod få grad tre. Pga symmetri kan vi anta att nod V_1 är förbunden med V_5 eller V_6. I första fallet kan vi inte hitta någon nod att förbinda V_6 med utan att skapa en förbjuden cykel. I andra fallet måste V_5 förbindas med V_9 och efter det finns inget sätt att förbinda V_4.